Anno Scolastico 2014 - 2015

27 maggio 2015 - Esercitazione Prova Scritta di Matematica

Il candidato svolga, a sua scelta, uno dei problemi e quattro dei quesiti proposti.

❶ Per stimare l'andamento nel tempo della numerosità della popolazione di pesci di un allevamento viene utilizzato il *modello malthusiano*[1], secondo il quale

$$\text{(MM)} \qquad x'(t) = ax(t), \qquad x(0) = x_0,$$

ove $x_0 > 0$ è la numerosità della popolazione all'istante iniziale $t = 0$, $x(t)$ è la numerosità dopo t anni dall'istante iniziale, a è il *potenziale biologico*, definito come il rapporto tra l'incremento annuo della popolazione e la numerosità totale.

a) Il candidato individui le dimensioni fisiche del potenziale biologico, che viene assunto positivo e costante nel tempo; determini la funzione $x(t)$ soluzione di (MM) e ne studi l'andamento, spiegando perché tale modello non è realistico su intervalli di tempo lunghi;

b) Per ottenere una descrizione più realistica, il modello malthusiano può essere modificato aggiungendo all'equazione differenziale un termine che contrasta la crescita della popolazione:

$$\text{(ML)} \qquad x'(t) = ax(t) - \frac{a}{m}x^2(t), \qquad x(0) = x_0.$$

ove m è una costante positiva. Si ottiene in questo modo un modello della dinamica della popolazione detto *modello logistico*[2]. Il candidato verifichi che (ML) ha come soluzione la funzione

$$x(t) = \frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0}, \qquad \text{con } t \geq 0.$$

Di questa funzione studi la monotonia e il valore asintotico nei tre casi seguenti: $x_0 < m$, $x_0 > m$ e $x_0 = m$, interpretando il significato della costante m, che prende il nome di *capacità portante dell'ambiente*.

c) In un dato allevamento al primo gennaio dell'anno 2015 si contano 1000 pesci e si stima un incremento annuale del 25%; la capacità portante dell'allevamento è di 5000 pesci. Il candidato studi il grafico della funzione soluzione di (ML), determinando in particolare in quale anno e semestre la crescita della popolazione incomincia a rallentare e in quale anno e semestre la popolazione raggiungerà il 95% della capacità portante.

d) Per un altro allevamento si stima che nel quinquennio 2015-2020 la popolazione di pesci cresca con legge

$$x(t) = 5000\frac{e^{t/4}}{3t/8 + 5},$$

ove, anche in questo caso, la durata è misurata in anni e si pone l'istante iniziale $t = 0$ in corrispondenza al primo gennaio 2015. Il candidato verifichi che, secondo quanto previsto dal modello, questo secondo allevamento supererà il primo in numerosità e determini in quale trimestre del quinquennio (gennaio-marzo, aprile-giugno,...) avverrà il sorpasso. A questo proposito si assuma per semplicità che l'anno sia diviso in quattro trimestri di uguale durata.

[1] L'economista T.R. Malthus, tra i primi a dedicarsi allo studio demografico, elaborò questo modello nel saggio *An Essay on the Principle of Population* pubblicato nel 1798.

[2] Il modello logistico viene introdotto dal matematico belga P. F. Verhulst nel 1838.

❷ Un architetto deve progettare una piscina la cui vasca ha superficie trapezoidale. Il trapezio è isoscele, ha base maggiore di lunghezza 30 metri, base minore e altezza pari a 10 metri. L'architetto deve confrontare due progetti:

- nel primo la cavità della vasca è il solido generato dalla rotazione di 90° del trapezio intorno alla sua base maggiore;

- nel secondo la cavità è un solido le cui sezioni, ottenute perpendicolarmente alle basi del trapezio, sono tutte dei quadrati;

a) L'architetto deve scegliere il progetto in cui sia minimo il rapporto fra la capacità della piscina, cioè il volume massimo di acqua che questa può contenere, e l'area della superficie interna della vasca che andrà piastrellata e opportunamente impermeabilizzata. Quale progetto dovrà essere scelto?

b) Una volta stabilito che il progetto da scegliere è il primo, e che il volume della piscina, approssimato alle centinaia, è $1.3 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$, l'architetto costruisce la piscina ed effettua delle prove di riempimento e svuotamento. In particolare si verifica che la funzione che descrive adeguatamente il contenuto della piscina durante lo svuotamento è la seguente: $f(t) = 1767(t^2 + 2t + 2)e^{-1-t}$, dove il tempo è espresso in ore. Si disegni il grafico della funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

c) In quale istante, durante lo svuotamento della piscina, la velocità di deflusso dell'acqua è massima?

d) La piscina si considera vuota quando il suo contenuto è minore di 100 litri. Quante ore e quanti minuti saranno necessari per svuotare la piscina?

Quesiti

① Una macchina produce in serie chiavi per un particolare modello di lucchetto. È noto che la lunghezza delle chiavi prodotte risulta normalmente distribuita con valor medio 42.00 mm e deviazione standard 0.10 mm. Le chiavi con lunghezza inferiore a 41.90 mm e superiore a 42.15 mm devono essere scartate poiché non compatibili con il lucchetto. Qual è la probabilità che una chiave di un lotto di pezzi prodotto dalla macchina superi il collaudo? Nella seguente tabella sono riportati alcun valori (approssimati alla terza cifra significativa) della funzione di ripartizione $F(z)$ della variabile standard normalizzata (media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$):

z	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
F(z)	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

② Un'automobile in moto lungo una strada rettilinea ha in ogni istante di tempo una velocità direttamente proporzionale alla distanza dalla meta verso cui è diretta. L'automobile raggiungerà la meta? Argomentare esaurientemente la risposta fornita.

③ Un poliedro convesso di volume $\mathcal{V}$ e superficie $\mathcal{A}$ è circoscritto ad una sfera di raggio R. Si dimostri che $R = 3\mathcal{V}/\mathcal{A}$.

④ Si consideri un semicerchio di raggio r avente diametro AB. Una semiretta uscente da A divide il semicerchio in due parti equivalenti; essa forma con AB un angolo x. Si calcoli il valore di x con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

⑤ Duecento anni fa, nel 1815, nasceva a Ostenfelde il grande matematico Karl Weierstrass. Il candidato enunci il teorema di Weierstrass e illustri la sua importanza nella dimostrazione del teorema di Rolle.

⑥ Data l'equazione differenziale $y" + 9y = 6e^{3x}$, la sua soluzione generale è: a) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + (1/3)e^{3x}$; b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + (1/3)\sin 3x$; c) $y = C_1 + C_2e^{9x} + (1/3)e^{3x}$; d) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + (1/3)e^{3x}$. Il candidato scelga la risposta corretta e argomenti sinteticamente ma in modo esauriente la procedura che si deve svolgere per ottenerla.

⑦ In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ è dato il piano α di equazione $3x+3y+4z-12 = 0$. Si determini il volume del poliedro convesso racchiuso da α e dai tre piani xy, xz, yz formati dagli assi cartesiani e si calcoli la distanza del piano α dall'origine O.

⑧ Enrico, Francesco, Davide e Alex stanno giocando con un mazzo di 40 carte. Nel gioco vengono distribuite 10 carte a testa. a) Qual è la probabilità che Francesco non abbia in mano nessuna carta di denari? b) Qual è la probabilità che Enrico abbia in mano almeno una carta di denari? c) All'inizio del gioco Davide esclama: ""Non ho in mano nessuna carta di denari!". Qual è la probabilità che Alex non abbia in mano nessuna carta di denari?

Svolgimento Problema 1

•[...] Il candidato individui le dimensioni fisiche del potenziale biologico, che viene assunto positivo e costante nel tempo; determini la funzione $x(t)$ soluzione di (MM) e ne studi l'andamento, spiegando perché tale modello non è realistico su intervalli di tempo lunghi;

L'analisi dimensionale fisica del potenziale biologico conduce a:

$$[a] = [x']/[x] = [1/T]/1 = 1/[T].$$

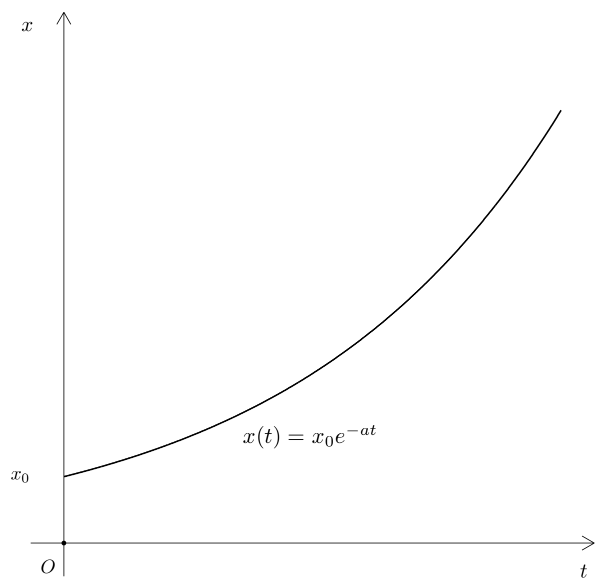
La dimensione fisica del potenziale è quindi l'inverso del tempo. Considerata la specifica definizione data, l'unità di misura della costante è anno^{-1}. La funzione che descrive la dinamica della popolazione nel tempo è la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\text{(MM)} \qquad x'(t) = ax(t), \qquad x(0) = x_0,$$

L'equazione differenziale è del primo ordine omogenea con equazione caratteristica $\lambda - a = 0$, quindi il suo integrale generale è $x(t) = Ke^{-at}$, con $k \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale si trova che $K = x_0$, pertanto il problema (MM) ha come soluzione

$$x(t) = x_0 e^{at}, \qquad \text{con } t \geq 0.$$

Si tratta dunque di una funzione esponenziale monotona crescente ($a > 0,\ x_0 \neq 0$) il cui grafico è riportato nella seguente figura:



Il modello malthusiano prevede dunque che la popolazione diverga all'infinito quando t tende all'infinito. Tale comportamento è chiaramente irrealistico sui tempi lunghi per qualsiasi tipo di popolazione che sia soggetta a risorse limitate (spazio, cibo, ...), come nel caso di un allevamento.

•[...] Per ottenere una descrizione più realistica, il modello malthusiano può essere modificato aggiungendo all'equazione differenziale un termine che contrasta la crescita della popolazione:

$$\text{(ML)} \qquad x'(t) = ax(t) - \frac{a}{m}x^2(t), \qquad x(0) = x_0.$$

ove m è una costante positiva. Si ottiene in questo modo un modello della dinamica della popolazione detto *modello logistico*. Il candidato verifichi che (ML) ha come soluzione la funzione

$$x(t) = \frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0}, \quad \text{con } t \geq 0.$$

Di questa funzione studi la monotonia e il valore asintotico nei tre casi seguenti: $x_0 < m$, $x_0 > m$ e $x_0 = m$, interpretando il significato della costante m, che prende il nome di *capacità portante dell'ambiente*.

L'equazione differenziale che governa il modello logistico è in questo caso non lineare, ma del tipo a variabili separabili, pertanto può essere integrata con metodi elementari. Tuttavia la richiesta del problema richiede solo di verificare che una data funzione risolve le equazioni del modello. Iniziamo con la verifica della condizione iniziale:

$$x(0) = \frac{mx_0e^0}{x_0e^0 + m - x_0} = \frac{mx_0}{x_0 + m - x_0} = x_0.$$

Derivando $x(t)$ si ottiene

$$x'(t) = mx_0\frac{ae^{at}(x_0e^{at} + m - x_0) - e^{at}(x_0ae^{at})}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} = mx_0a\frac{e^{at}(m - x_0)}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2}. \tag{1}$$

pertanto occorre verificare che

$$mx_0a\frac{e^{at}(m - x_0)}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} = a\frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0} - \frac{a}{m}\left(\frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0}\right)^2,$$

che, semplificando il fattore non nullo mx_0ae^{at}, equivale a

$$\frac{m - x_0}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} = \frac{1}{x_0e^{at} + m - x_0} - \frac{1}{m}\frac{mx_0e^{at}}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2},$$

ovvero, portando a comune denominatore l'espressione, all'identità

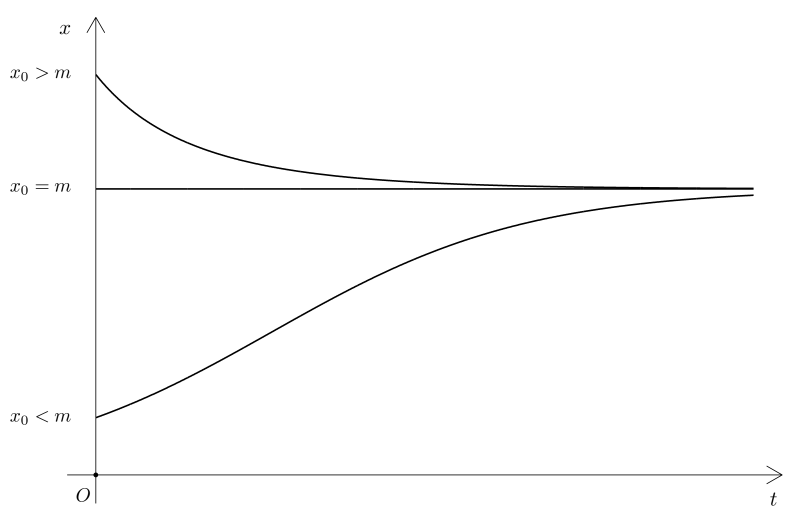
$$\frac{m - x_0}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} = \frac{x_0e^{at} + m - x_0 - x_0e^{at}}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} \leftrightarrow \frac{m - x_0}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2} = \frac{m - x_0}{(x_0e^{at} + m - x_0)^2}.$$

Controllando l'equazione (1), si deduce immediatamente che il segno della derivata $x'(t)$ è costante ed è dato dal termine $m - x_0$. In particolare, se $m = x_0$ la derivata prima è nulla e in tal caso $x(t) = X_0$, cioè la popolazione si mantiene costante nel tempo.

Se $m < x_0$ la derivata è negativa e quindi $x(\cdot)$ è monotona decrescente, mentre se $m > x_0$ la funzione $x(\cdot)$ è monotona crescente. In entrambi i casi il comportamento asintotico è il medesimo:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{mx_0e^{at}}{x_0e^{at} + m - x_0} = \lim_{t\to+\infty}\frac{mx_0}{x_0 + (m - x_0)e^{-at}} = \frac{mx_0}{x_0} = m.$$

La capacità portante dell'ambiente m rappresenta quindi la numerosità alla quale, qualunque sia la condizione iniziale (purché ovviamente x_0 non sia nullo), è destinata a tendere la popolazione. I grafici rappresentativi delle tre condizioni sono riportati nella seguente figura:



•In un dato allevamento a gennaio dell'anno 2015 si contano 1000 pesci e si stima un incremento annuale del 25%; la capacità portante dell'allevamento è di 5000 pesci. Il candidato studi il grafico della funzione soluzione di (ML), determinando in particolare in quale anno e semestre la crescita della popolazione incomincia a rallentare e quale anno e semestre la popolazione raggiungerà il 95% della capacità portante.

Nel caso considerato si ha quindi $a = 0.25$, $m = 5000$ e $x_0 = 1000$. La funzione $x(t)$ è dunque

$$x(t) = 5000\frac{1000e^{t/4}}{1000e^{t/4} + 4000} = 5000\frac{e^{t/4}}{e^{t/4} + 4}, \qquad \text{con } t \geq 0$$

la cui derivata prima, già calcolata in precedenza, è

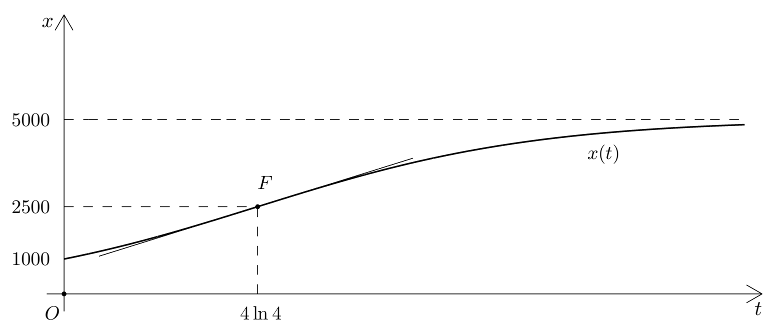
$$x'(t) = 5000\frac{e^{t/4}}{(e^{t/4} + 4)^2}$$

da cui si ottiene che la derivata seconda risulta

$$x''(t) = 1250\frac{e^{t/4}(4 - e^{t/4})}{(e^{t/4} + 4)^3}.$$

La funzione $x(\cdot)$, come già visto nel punto precedente, risulta quindi monotona crescente con valore iniziale 1000 e valore limite 5000. La derivata seconda ha il segno di $4 - e^{t/4}$, pertanto è positiva per $t < 4\ln 4$, nulla per $t = 4\ln 4$ e negativa per $t > 4\ln 4$. La concavità del grafico di $x(\cdot)$ è quindi rivolta verso l'alto per $t < 4\ln 4$ e verso il basso per $t > 4\ln 4$, con un flesso obliquo per $t = 4\ln 4$. Secondo il modello, la velocità di crescita della popolazione sarà quindi massima in corrispondenza al punto di flesso, cioè dopo $4\ln 4 \approx 1.39$ anni dall'istante iniziale, ovvero nel primo semestre del 2016. La velocità massima di crescita, che corrisponde al coefficiente angolare della tangente di flesso, è quindi

$$x'(4\ln 4) = 5000\frac{e^{\frac{4\ln 4}{4}}}{(e^{\frac{4\ln 4}{4}} + 4)^2} = 5000\frac{4}{64} \approx 312.5.$$



Il 95% della capacità portante viene raggiunto quando

$$5000\frac{e^{t/4}}{e^{t/4} + 4} = 0.95 \cdot 5000 \leftrightarrow 20e^{t/4} = 19(e^{t/4} + 4) \leftrightarrow e^{t/4} = 76 \leftrightarrow t = 4\ln 76 \approx 17.3$$

pertanto, tale evento è previsto nel primo semestre del 2032.

•Per un altro allevamento si stima che nel quinquennio 2015-2020 la popolazione di pesci cresca con legge

$$x(t) = 5000\frac{e^{t/4}}{3t/8 + 5},$$

ove, anche in questo caso, la durata è misurata in anni e si pone l'istante iniziale $t = 0$ in corrispondenza al primo gennaio 2015. Il candidato verifichi che, secondo quanto previsto dal modello, questo secondo allevamento supererà il primo in numerosità e determini in quale trimestre del quinquennio (gennaio-marzo, aprile-giugno,...) avverrà il sorpasso. A questo proposito si assuma per semplicità che l'anno sia diviso in quattro trimestri di uguale durata.

Indicate con x_1 e x_2 le popolazioni rispettivamente del primo e del secondo allevamento, la relazione $x_1 \leq x_2$ equivale a

$$5000\frac{e^{t/4}}{e^{t/4}+4} \leq 5000\frac{e^{t/4}}{3t/8+5} \leftrightarrow \frac{1}{e^{t/4}+4} \leq \frac{1}{3t/8+5} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow 3t/8+5 \leq e^{t/4}+4 \leftrightarrow 3t/8+1 \leq e^{t/4}.$$

Per rispondere alla richiesta, occorre individuare gli zeri strettamente positivi della funzione definita da

$$h(t) = e^{t/4} - 3t/8 - 1, \qquad \text{con } t \geq 0.$$

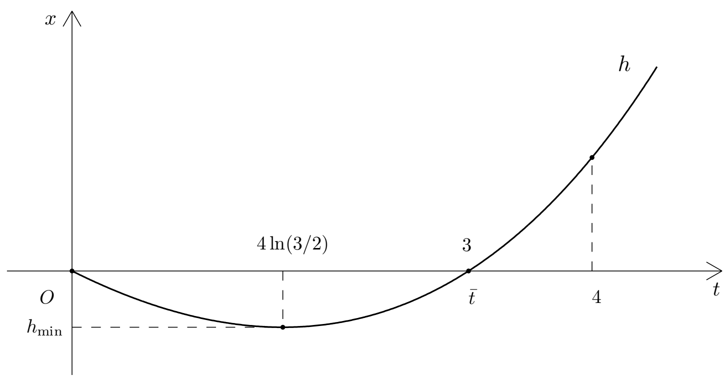
Si osservi che le derivate prima e seconda di h sono

$$h'(t) = \frac{1}{4}(e^{t/4} - 3/2), \qquad h''(t) = \frac{1}{16}e^{t/4}$$

pertanto h decresce dal valore iniziale $h(0) = 0$ al proprio minimo assoluto che assume per $t = 4\ln(3/2) \approx 1.62$, per poi crescere tendendo all'infinito per $t \to +\infty$. Il minimo valore di h è

$$h_{\min} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1 \approx -0.108 < 0,$$

pertanto, in ragione delle sue monotonia e continuità, la funzione h assumerà un unico zero positivo $\bar{t}$ con $\bar{t} > 4\ln(3/2)$. Si osservi inoltre che $h(3) = e^{3/4} - 9/8 - 1 < 0$ e $h(4) = e - 3/2 - 1 = e - 2.5 > 0$, pertanto lo zero $\bar{t}$ è compreso nell'intervallo $[3\,4]$ in cui h è monotona crescente con derivata seconda positiva.



Per trovare una approssimazione adeguata dello zero si può ricorrere al metodo delle tangenti di Newton, a partire dell'approssimazione per eccesso $t_0 = 4$ e scegliendo le seguenti con la regola ricorsiva

$$t_{n+1} = t_n - \frac{h(t_n)}{h'(t_n)} = t_n - \frac{e^{t_n/4} - 3t_n/8 - 1}{\frac{1}{4}(e^{t_n/4} - 3/2)} = t_n - \frac{8e^{t_n/4} - 3t_n - 8}{2e^{t_n/4} - 3} = \frac{8 - 8e^{t_n/4} + 2t_n e^{t_n/4}}{2e^{t_n/4} - 3}.$$

I primi quattro valori della successione (approssimati per eccesso al secondo decimale) sono $4.000,\ 3.284,\ 3.071,\ 3.051$, pertanto si ha che

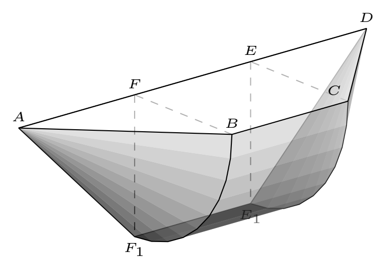
$$3 < \bar{t} < 3.051 < 3 + 1/12 < 3 + 1/4.$$

Dunque, secondo le previsioni del modello, il sorpasso avverrà nel primo trimestre del 2108, e più precisamente in gennaio.

Svolgimento Problema 2

❶ [...] L'architetto deve scegliere il progetto in cui sia minimo il rapporto fra la capacità della piscina, cioè il volume massimo di acqua che questa può contenere, e l'area della superficie interna della vasca che andrà piastrellata e opportunamente impermeabilizzata. Quale progetto dovrà essere scelto?

Si consideri innanzitutto il primo progetto. La figura di rotazione è formata da due quarti di cono di altezza $h = \overline{AF} = \overline{ED} = 10\,\mathrm{m}$ e raggio di base $r = \overline{FB} = \overline{EC} = 10\,\mathrm{m}$, i quali sono connessi da un quarto di cilindro anch'esso di altezza $h = \overline{FE} = 10\,\mathrm{m}$ e medesimo raggio di base.



Il volume della figura è quindi

$$\mathcal{V} = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 h = \frac{5}{12}\pi r^2 h = \frac{5}{12}\pi 10^3 \approx 1309\,\mathrm{m}^3 \approx 1.3 \times 10^2\,\mathrm{m}^3.$$

Indicato con $a = \sqrt{r^2 + h^2} = h\sqrt{2}$ l'apotema dei due coni, la superficie della regione curva è quindi

$$\mathcal{A}_C = \frac{1}{4}(2a\pi r + h2\pi r) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}h\pi r$$

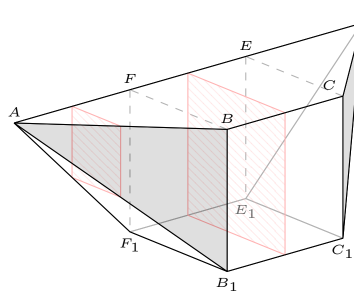
Oltre alla parte curva, la superficie della vasca è formata dal trapezio (ADE_1F_1) equivalente alla pianta $(ABCD)$, pertanto la sua area risulta

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_C + \mathcal{A}_T = \frac{\sqrt{2}+1}{2}h\pi r + \frac{3h+h}{2}r = \frac{\sqrt{2}+1}{2}100\pi + 200 \approx 579\,\mathrm{m}^2.$$

Il rapporto volume area per questo primo progetto è quindi

$$R_1 = \frac{1309}{579} \approx 2.26\,\mathrm{m}.$$

Si consideri ora il secondo progetto. In questo caso è facile costatare che la figura è formata da due piramidi $(AFBB_1F_1)$ e $(DECC_1E_1)$, a base quadrata di lato $\ell = \overline{FB} = \overline{EC} = 10\,\mathrm{m}$ e altezza $h = \overline{AF} = \overline{ED} = 10\,\mathrm{m}$, connesse da un cubo di lato $\ell = \overline{FE} = 10\,\mathrm{m}$.



Il volume della figura è quindi

$$\mathcal{V} = 2 \cdot \frac{1}{3}\ell^2 h + \ell^3 = \frac{5}{3}10^3 \approx 1667\,\mathrm{m}^3.$$

Per quanto riguarda la superficie della cavità, si osservi che essa è formata da 6 triangoli e tre quadrati. I triangoli, in virtù del *Teorema delle tre perpendicolari* sono inoltre tutti rettangoli. Si ha quindi

$$\mathcal{A} = 3\ell^2 + 2\left(\frac{\ell^2}{2} + 2 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{2}}{2}\right) = 100(4 + 2\sqrt{2}) \approx 682\,\mathrm{m}^2.$$

Il rapporto volume area per questo secondo progetto è quindi

$$R_2 = \frac{1667}{682} \approx 2.44\,\mathrm{m}.$$

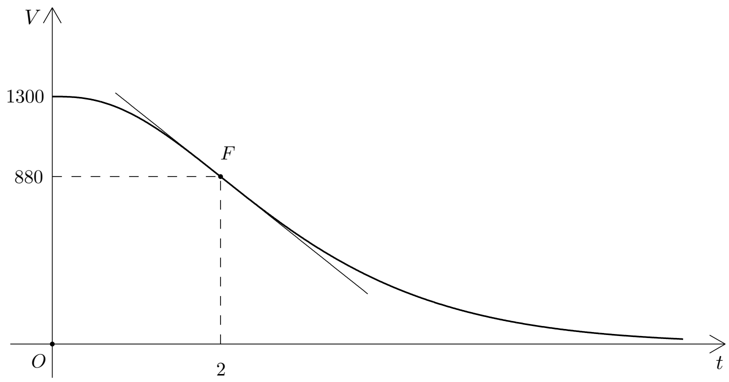
Il progetto che l'architetto dovrà scegliere è quindi il primo.

❷ [...] Una volta stabilito che il progetto da scegliere è il primo, e che il volume della piscina, approssimato alle centinaia, è $1.3 \times 10^3\,\mathrm{m}^3$, l'architetto costruisce la piscina ed effettua delle prove di riempimento e svuotamento. In particolare si verifica che la funzione che descrive adeguatamente il contenuto della piscina durante lo svuotamento è la seguente: $f(t) = 1767(t^2 + 2t + 2)e^{-1-t}$, dove il tempo è espresso in ore. Si disegni il grafico della funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

La funzione data è continua e derivabile arbitrariamente essendo prodotto di un polinomio e di un esponenziale. Si osservi che per $t = 0$ si ottiene il volume $f(0) = 1767 \cdot 2/e \approx 1300$, che corrisponde alla capacità della vasca. Inoltre la funzione tende a zero per $t \to +\infty$, essendo l'ordine di infinitesimo dell'esponenziale e^{-1-t} superiore a quello d'infinito del polinomio t^2+2t+2. Le derivate prima e seconda risultano

$$f'(x) = -1767 \cdot t^2 e^{-1-t} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = 1767 \cdot t(t-2)e^{-1-t}.$$

La derivata prima è sempre positiva, ad eccezione di $t = 0$, istante in cui si annulla. Se ne deduce che la funzione f tende a zero decrescendo, con tangente orizzontale all'istante iniziale $t = 0$. La derivata seconda è invece positiva nell'intervallo $]0,\ 2[$, nulla per $t = 2$ e negativa per $t > 2$. Se ne deduce che il grafico di f ha la concavità verso l'alto per $t \in]0,\ 2[$ e verso il basso per $t > 2$; per $t = 2$ il grafico presenta un flesso a tangente obliqua di pendenza $m = f'(2) \approx -352$. Considerati gli elementi acquisiti, il grafico della funzione è quindi il seguente:



❸ [...]In quale istante, durante lo svuotamento della piscina, la velocità di deflusso dell'acqua è massima?

Si osservi che la velocità di deflusso, ovvero la portata volumetrica dello scarico, è data dalla derivata prima f' del volume contenuto nella vasca. Gli intervalli di monotonia della velocità di deflusso f' sono dati dal segno della derivata seconda f'', pertanto la velocità di deflusso assume il suo massimo per $t = 2\,\mathrm{h}$ e vale $352\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$.

❹ [...] La piscina si considera vuota quando il suo contenuto è minore di 100 litri. Quante ore e quanti minuti saranno necessari per svuotare la piscina?

Si tratta di individuare l'istante di tempo t tale per cui

$$f(t) = 0.1 \leftrightarrow 1767(t^2 + 2t + 2)e^{-1-t} = 0.1 \leftrightarrow (t^2 + 2t + 2)e^{-t} - e/17670 = 0 \leftrightarrow g(t) = 0,$$

ove si è posto $g(t) = (t^2 + 2t + 2)e^{-t} - e/17670$. La funzione g è continua, derivabile un numero arbitrario di volte e decrescente. Poiché $g(14) \approx 3.4 \times 10^{-4} > 0$ e $g(15) \approx -7.5 \times 10^{-4} < 0$, in virtù del *Teorema degli zeri*, si può dedurre che la piscina sarà vuota tra le 14 e le 15 ore dall'apertura dello scarico. Si tratta ora di fornire un'approssimazione adeguata dello zero $\bar{t}$. Si utilizzerà a tale proposito il *Metodo delle Tangenti*, qui applicabile poiché nell'intervallo individuato la derivata prima di g è negativa, mentre quella seconda è positiva. Si considera quindi come approssimazione (per difetto) iniziale $t_0 = 14$, scegliendo le successive con la formula ricorsiva:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} = t_n + \frac{\left({t_n}^2 + 2\,t_n + 2\right)e^{-t_n} - 0.0154}{e^{-t_n}{t_n}^2} = 1 + \frac{2 + 2\,t_n + e^{t_n}(t_n^3 - 0.0154)}{t_n^2}.$$

I primi cinque valori della successione (approssimati per difetto al quarto decimale) sono 14.000, 14.2091, 14.2303, 14.2305, 14
Si osservi inoltre che $g(14.2306) \approx -9.5e - 9 < 0$, pertanto si può dedurre che

$$14.2305 < \bar{t} < 14.2306 \to 14 + \frac{13.830}{60} < \bar{t} < 14 + \frac{13.836}{60} \to 14 + \frac{13}{60} + \frac{49.8}{3600} < \bar{t} < 8 + \frac{13}{60} + \frac{50.16}{3600}$$

L'istante $\bar{t}$ può quindi essere stimato pari a 14 ore, 13 minuti e 50 secondi, con un'incertezza di due decimi di secondo; si osservi tuttavia che la bassa incertezza ottenuta nella stiam di $\bar{t}$ si basa sull'assunzione che la funzione f descriva con assoluta accuratezza il volume della piscina.

Svolgimento Quesiti

① Una macchina produce in serie chiavi per un particolare modello di lucchetto. È noto che la lunghezza delle chiavi prodotte risulta normalmente distribuita con valor medio $42.00\,\mathrm{mm}$ e deviazione standard $0.10\,\mathrm{mm}$. Le chiavi con lunghezza inferiore a $41.90\,\mathrm{mm}$ e superiore a $42.15\,\mathrm{mm}$ devono essere scartate poiché non compatibili con il lucchetto. Qual è la probabilità che una chiave di un lotto di pezzi prodotto dalla macchina superi il collaudo? Nella seguente tabella sono riportati alcun valori (approssimati alla terza cifra significativa) della funzione di ripartizione $F(z)$ della variabile standard normalizzata (media $\mu = 0$ e deviazione standard $\sigma = 1$):

z	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
F(z)	0.500	0.691	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

Sia X la variabile aleatoria rappresentante la lunghezza dei pezzi prodotti dalla macchina. La variabile aleatoria normalizzata si ottiene ponendo $Z = (X - \mu)/\sigma$, ove μ è il valor medio di X e σ la deviazione standard. Pertanto si ha:

$$41.90 \leq X \leq 42.15 \leftrightarrow 41.90 - 42.00 \leq X - \mu \leq 42.15 - 42.00 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow -\frac{0.10}{0.10} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.15}{0.10} \leftrightarrow -1.0 \leq Z \leq 1.5$$

Pertanto la probabilità che una chiave del lotto superi il collaudo è

$$\mathbf{P}(-1.0 \leq Z \leq 1.5) = \int_{-1.0}^{1.5} f(z)\,dz = F(1.5) - F(-1.0) = F(1.5) - [1 - F(1.0)] =$$
$$= F(1.5) + F(1.0) - 1 = 0.933 + 0.841 - 1 = 0.774 = 77.4\%$$

② Un'automobile in moto lungo una strada rettilinea ha in ogni istante di tempo una velocità direttamente proporzionale alla distanza dalla meta verso cui è diretta. L'automobile raggiungerà la meta? Argomentare esaurientemente la risposta fornita.

Indicate con $x = 0$ e $v_0 > 0$ rispettivamente posizione e velocità dell'auto all'istante $t = 0$ e con $x = L > 0$ la posizione della meta, la relazione di diretta proporzionalità può scriversi nella forma:

$$\frac{v(t)}{v_0} = \frac{L - x(t)}{L},$$

pertanto l'equazione differenziale del moto dell'auto è $v(t) = x'(t) = \frac{v_0}{L}(L - x(t))$, con condizione iniziale $x(0) = 0$. L'equazione omogenea associata ha equazione caratteristica $\lambda + v_0/L = 0$, quindi il suo integrale generale è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = Ke^{-\frac{v_0}{L}t}, \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa è ovviamente $x_{\mathrm{part}}(t) = L$, pertanto l'integrale generale della completa è

$$x(t) = Ke^{-\frac{v_0}{L}t} + L, \qquad \text{con } K \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 0$, si ottiene che $K = -L$, pertanto al soluzione del problema è

$$x(t) = L(1 - e^{-\frac{v_0}{L}t}), \qquad \text{con } t \geq 0.$$

Si osservi quindi che in ogni istante di tempo $x(t) < L$, pertanto la meta non viene mai raggiunta. Poiché $x(t) \to L$ per $t \to +\infty$, si può concludere che, pur non venendo mai raggiunta, la meta è il valore limite a cui tende asintoticamente la posizione dell'auto.

③ Un poliedro convesso di volume $\mathcal{V}$ e superficie $\mathcal{A}$ è circoscritto ad una sfera di raggio R. Si dimostri che $R = 3\mathcal{V}/\mathcal{A}$.

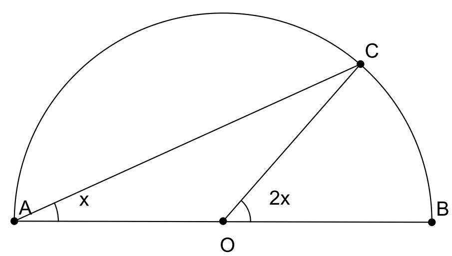
Sia O il centro della sfera e $H_1, \dots, H_n$ i punti in cui la sfera è tangente alle n facce del poliedro. Il poliedro può essere equi-scomposto in n piramidi di vertice O ciascuna con base in una delle n facce del poliedro, le cui aree si indichino con $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$. Si osservi che i raggi $OH_1, \dots, OH_n$, essendo perpendicolari alle rispettive facce, risultano le altezze delle n piramidi. Pertanto, ne consegue che

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \cdots + \mathcal{V}_n = \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \cdot OH_1 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_n \cdot OH_n = \frac{1}{3}(\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_n) \cdot R = \frac{1}{3}\mathcal{A} \cdot R$$

da cui si ottiene $R = 3\mathcal{V}/\mathcal{A}$.

④ Si consideri un semicerchio di raggio r avente diametro AB. Una semiretta uscente da A divide il semicerchio in due parti equivalenti; essa forma con AB un angolo x. Si calcoli il valore di x con un'approssimazione alla prima cifra decimale.

Il problema non varia al variare delle dimensioni del semicerchio, pertanto è possibile, senza perdita di generalità, porre uguale a 1 il raggio del semicerchio. L'area del semicerchio sarà dunque $\pi/2$; si cerca l'angolo x tale che il semicerchio sia diviso dal segmento AC in due parti di area $\pi/4$. L'area sottostante AC può essere calcolata come somma dell'area del triangolo AOC e del settore circolare BOC. L'angolo $\widehat{AOC}$ vale $\pi - 2x$, quindi l'area del triangolo AOC sarà: $(1/2) \cdot \sin(\pi - 2x) = (1/2) \cdot \sin 2x$. L'area del settore circolare varrà invece $\frac{2x}{2} = x$. L'equazione che si deve risolvere è pertanto $2x + \sin 2x = \pi/2$.



Per comodità di calcolo si ponga $2x = \alpha$; è richiesto di risolvere l'equazione $\alpha + \sin\alpha - \pi/2 = 0$, che può essere affrontata, ad esempio, col metodo di bisezione. Si verifica agevolmente che la soluzione è situata nell'intervallo [0, 1]. Bisecando l'intervallo per 4 volte, si ottiene che la radice appartiene all'intervallo [13/16, 7/8], e cioè che, con un'approssimazione alla prima cifra decimale, l'angolo α vale 0,8; l'angolo x cercato vale 0,4.

⑤ Duecento anni fa, nel 1815, nasceva a Ostenfelde il grande matematico Karl Weierstrass. Il candidato enunci il teorema di Weierstrass e illustri la sua importanza nella dimostrazione del teorema di Rolle.

L'enunciato del teorema di Weierstrass è il seguente: una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato ammette un massimo e un minimo valore. Il teorema di Rolle afferma che: data una funzione continua e derivabile su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, e tale che sia $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto interno all'intervallo in cui la funzione ha derivata uguale a zero. La dimostrazione del teorema di Rolle si divide in due casi: nel primo caso, se la funzione è una costante di valore $k = f(a) = f(b)$, allora la sua derivata è ovunque nulla e il teorema risulta dimostrato; nel secondo caso, se la funzione non è costante, allora è possibile applicare il teorema di Weierstrass e dedurre che la funzione ammette un massimo e un minimo valore. Ora, se il minimo è assunto nei punti di estremo, a e b, allora il massimo deve necessariamente essere in un punto interno; viceversa, se il massimo è assunto nei punti di estremo, allora il minimo deve necessariamente essere in un punto interno. Pertanto, in ambedue i sottocasi, esiste un punto di estremo interno all'intervallo $[a, b]$; ma per il teorema di Fermat in un punto di estremo la derivata, se esiste, è nulla. Quindi, essendo la funzione derivabile per ipotesi nei punti interni, allora esiste almeno un punto in cui la derivata è nulla.

⑥ Data l'equazione differenziale $y" + 9y = 6e^{3x}$, la sua soluzione generale è: a) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + (1/3)e^{3x}$; b) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + (1/3)\sin 3x$; c) $y = C_1 + C_2e^{9x} + (1/3)e^{3x}$; d) $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + (1/3)e^{3x}$. Il candidato scelga la risposta corretta e argomenti sinteticamente ma in modo esauriente la procedura che si deve svolgere per ottenerla.

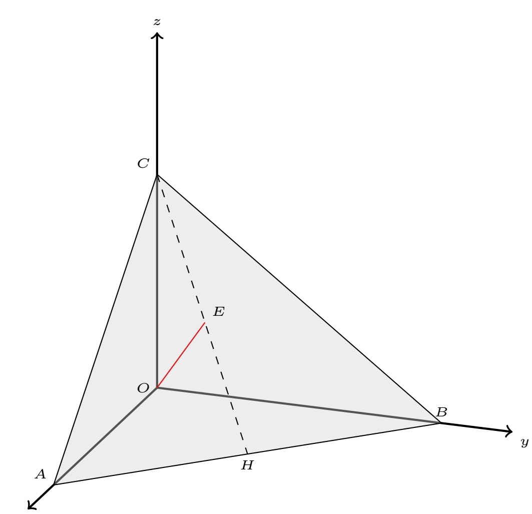
Calcolando le derivate e inserendo di volta in volta i risultati nell'equazione differenziale di partenza è possibile verificare che la soluzione corretta è la d). L'equazione proposta è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. La procedura per risolverla consiste nell'iniziare dall'equazione omogenea associata: $y" + 9y = 0$. Tale equazione si risolve individuando le radici dell'equazione caratteristica, $\lambda^2 + 9 = 0$, che sono i due numeri immaginari puri $\pm 3i$. Questo caso prevede che la soluzione generale sia $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$. Il secondo passaggio è determinare una soluzione dell'equazione omogenea; dal momento che il termine noto è una funzione esponenziale, si cercherà tale soluzione nell'ambito delle funzioni dello stesso tipo: $y = Ae^{3x}$. Con una facile derivazione e sostituzione si ottiene che il coefficiente A vale $1/3$. La soluzione generale dell'equazione non omogenea è infine la somma di quella dell'omogenea con la soluzione particolare appena trovata: $y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$.

⑦ In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ è dato il piano α di equazione $3x+3y+4z-12 = 0$. Si determini il volume del poliedro convesso racchiuso da α e dai tre piani xy, xz, yz formati dagli assi cartesiani e si calcoli la distanza del piano α dall'origine O.

Conviene innanzitutto determinare le intersezioni di α con gli assi cartesiani:

$$A = \alpha \cap x \ : \ \begin{cases} 3x + 3y + 4z - 12 = 0 \\ y = 0 \wedge z = 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$$

Analogamente si trova che $B = \alpha \cap y = (0,\, 4,\, 0)$ e $C = \alpha \cap z = (0,\, 0,\, 3)$. Il poliedro convesso è quindi il tetraedro $(OABC)$ il cui spigolo OC è perpendicolare alla faccia (AOB), la quale è un triangolo rettangolo di cateti OA e OB.



Il volume del tetraedro è pertanto

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}(AOB) \cdot \overline{CO}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = 8$$

Si osservi ora che la faccia (ABC) è un triangolo isoscele con lati $\overline{CA} = \overline{CB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, e base $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$, la cui altezza risulta

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17},$$

e l'area

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{CH} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{34}.$$

La distanza tra α e O corrisponde all'altezza OE del tetraedro rispetto alla base (ABC), e quindi risulta

$$\mathrm{dist}(\alpha, O) = \frac{3 \cdot \mathcal{V}}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{3 \cdot 8}{2\sqrt{34}} = 6\frac{\sqrt{34}}{17}.$$

Una strada alternativa per determinare la lunghezza di OE è la seguente. Si osservi innanzitutto che il vettore $\vec{v} = (3, 3, 4)$ è ortogonale al piano α. Di conseguenza il piede E della perpendicolare OE al piano α deve appartenere alla retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = 4t, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Mettendo a sistema le precedenti equazioni con l'equazione cartesiana di α si ottiene

$$3 \cdot 3t + 3 \cdot 3t + 4 \cdot 4t = 12 \longleftrightarrow t = \frac{6}{17}.$$

Pertanto E ha coordinate $x = y = 18/17$ e $z = 24/17$, da cui

$$\overline{OE} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6\frac{\sqrt{34}}{17}.$$

⑧ Enrico, Francesco, Davide e Alex stanno giocando con un mazzo di 40 carte. Nel gioco vengono distribuite 10 carte a testa. a) Qual è la probabilità che Francesco non abbia in mano nessuna carta di denari? b) Qual è la probabilità che Enrico abbia in mano almeno una carta di denari? c) All'inizio del gioco Davide esclama: ""Non ho in mano nessuna carta di denari!". Qual è la probabilità che Alex non abbia in mano nessuna carta di denari?

La probabilità che Francesco non possieda alcuna carta di denari è pari al rapporto fra numero di combinazioni di 10 carte scelte fra le 30 carte non di denari, e il numero totale di combinazioni di 10 carte scelte fra 40:

$$C_{30,10}/C_{40,10} = \frac{\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}} \simeq 0,0354 = 3,54\%\,.$$

La domanda b) si risolve utilizzando la *probabilità complementare*; infatti possedere almeno una carta di denari è il complementare di non possederne alcuna:

$$1 - C_{30,10}/C_{40,10} = 1 - \frac{\binom{30}{10}}{\binom{40}{10}} \simeq 0,964 = 96,4\%\,.$$

Nella terza domanda il calcolo è modificato dal possesso di un'informazione chiave: Davide ha dieci carte, nessuna delle quali è di denari. Pertanto fra gli altri tre giocatori sono distribuite 30 carte, che comprendono tutte e dieci le carte di denari. La probabilità che Alex non abbia carte di denari si calcola ora in questo modo:

$$C_{20,10}/C_{30,10} = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}} \simeq 0,0061 = 0,61\%\,.$$