Anno Scolastico 2015 - 2016

25 maggio 2016 - Esercitazione Prova Scritta di Matematica

Il candidato svolga, a sua scelta, uno dei problemi e quattro dei quesiti proposti.

❶ L'inflazione, cioè l'aumento generalizzato e prolungato dei prezzi, porta alla diminuzione del potere d'acquisto della moneta. Se una persona percepisce un reddito costante, l'effetto dell'inflazione è una riduzione progressiva nel tempo del valore reale di questo reddito. Per stimare questo effetto è utile introdurre una grandezza fittizia, detta *reddito annuale reale* (RAR), indicata con $\mathcal{R}$, che coincide con il reddito annuale in un dato periodo di riferimento ed evolve nel tempo con legge

$$\frac{d\mathcal{R}}{dt} = -\gamma \cdot \mathcal{R},$$

ove il fattore γ rappresenta il *tasso d'inflazione annuo* e la variabile tempo t è misurata in anni.

a) Supposto che all'istante di riferimento $t = 0$ il reddito annuale valga $\mathcal{R}_0$ €/anno e il tasso d'inflazione γ valga $2,5\%$ costantemente nel tempo, ricava la legge di evoluzione del RAR per $t \geq 0$ e tracciane il grafico qualitativo in un opportuno riferimento cartesiano.

b) Determina l'espressione del reddito reale complessivo percepito in un generico intervallo $[0,\ T]$. Calcolane il valore asintotico per T che tende all'infinito e determina quanti anni sarebbero necessari per ottenere il medesimo reddito complessivo in assenza di inflazione.

c) Calcola un'approssimazione, avente il primo decimale esatto, dell'istante T tale per cui il reddito **medio** annuale reale nell'intervallo $[0\ ,\ T]$ (cioè il rapporto tra il reddito complessivo e la durata dell'intervallo di tempo) risulta pari al 90,6% del reddito iniziale $\mathcal{R}_0$.

d) Verificato che l'istante di tempo richiesto nel punto precedente corrisponde a $T \approx 8,0$ anni, assumendo il reddito iniziale $\mathcal{R}_0$ pari a 20000 €/anno, traccia il grafico dell'andamento del RAR nell'intervallo tra 0 e 8 anni, e calcola l'ammontare complessivo di reddito (reale) che la persona ha perduto in tale intervallo di tempo.

e) Si assuma ora che, con cadenza biennale (cioè negli istanti $T = 2, \ldots, 8$), il datore di lavoro intervenga con un aumento (istantaneo) di stipendio che riporta il RAR al suo valore iniziale. Traccia il grafico dell'andamento del RAR, e determina in questo caso a quanto ammonta la perdita complessiva di reddito causata dall'inflazione nel medesimo intervallo di 8 anni.

❷ Un oggetto si muove di moto rettilineo con un'accelerazione che, per valori di $t \geq 0$, è data dalla legge:

$$a(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}$$

ove t è espresso in secondi e l'accelerazione a in metri al secondo quadrato. Il candidato:

a) determini la legge $v(t)$ della velocità e la legge oraria $x(t)$ del moto, tenendo conto delle condizioni iniziali $v(0) = -1\,\mathrm{m/s}$ e $x(0) = 0\,\mathrm{m}$;

b) studi quindi la funzione $x(t)$ nel suo insieme di definizione (quindi anche per valori di t negativi), individuando in particolare un'approssimazione, a meno di un decimo di secondo, dell'istante in cui la velocità si annulla, e ne disegni il grafico Γ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale;

c) studi il limite asintotico di $v(t)$, $a(t)$ e del prodotto $a(t)v(t)$ al tendere di t a più infinito;

d) calcoli l'area della regione di piano finita delimitata da Γ e dall'asse delle ascisse;

e) calcoli l'area del triangolo formato dall'asse delle ascisse e dalle rette tangenti a Γ nei suoi punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

Quesiti

① Trova l'integrale generale dell'equazione differenziale $y^2y' = 2x$ e la soluzione particolare tale per cui $y(1) = 2$, verificando che questa soluzione, come necessario, è derivabile in $\mathbb{R}$. È corretto affermare che la funzione $y = \sqrt[3]{3x^2 - 3}$ soddisfa l'equazione differenziale su tutto $\mathbb{R}$?

② Sono date due rette r e s di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che r e s sono sghembe e determinare l'equazione cartesiana del piano α contenente r e parallelo a s; calcolare quindi la distanza tra le due rette.

③ In una semicirconferenza di centro O si consideri un triangolo isoscele avente per base una corda AB parallela al diametro e vertice in O; si faccia ruotare tale triangolo intorno all'asse della base AB. Tra tutti i possibili triangoli che rispondono alle condizioni richieste, per quale distanza di AB da O si ottiene il cono di volume massimo?

④ Dimostrare che le funzioni $y = \cos x$ e $y = x^3 + 1$ hanno due intersezioni reali e distinte. Con uno dei metodi noti, individuare, con un'approssimazione minore di $1/20$, l'ascissa di quella diversa da zero.

⑤ Una funzione continua f è tale che la sua media integrale nell'intervallo $[a, b]$ sia uguale ad $a + b$. Dimostrare che la condizione è soddisfatta dalla funzione $f(x) = 2x$, mentre non è soddisfatta da una funzione del tipo $f(x) = 2x + k$ con k reale non nullo.

⑥ La formula per la derivazione di un prodotto di funzioni prende il nome di "regola di Leibniz", dal nome dello scienziato e filosofo tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz, morto 300 anni fa (1716). Il candidato enunci e dimostri tale formula, e la applichi per calcolare la derivata della funzione $y = \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$.

⑦ Si calcoli il limite per $x \to +\infty$ della funzione $x^6 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$.

⑧ Si consideri una circonferenza γ di diametro AB appartenente a un piano α. Si conduca da A una retta perpendicolare ad α; sia P un suo punto qualunque. Detto M un punto di γ, si dimostri che l'angolo $\widehat{PMB}$ è retto.

Svolgimento Problema 1

a) Supposto che all'istante di riferimento $t = 0$ il reddito annuale valga $\mathcal{R}_0$ €/anno e il tasso d'inflazione γ valga 2.5% costantemente nel tempo, ricava la legge di evoluzione del RAR per $t \geq 0$ e tracciane il grafico qualitativo in un opportuno riferimento cartesiano.

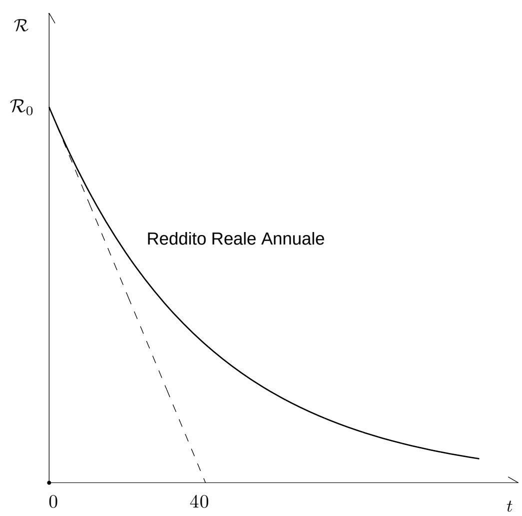
L'equazione differenziale è a coefficienti costanti ed omogenea, pertanto il suo integrale generale è

$$\mathcal{R} = ke^{-\gamma t},$$

da cui, imponendo al condizione iniziale $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}_0$ e sostituendo $\gamma = 2,5/100 = 1/40$, si ottiene la soluzione del problema di Cauchy assegnato:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 e^{-\frac{t}{40}}.$$

Il grafico del reddito reale annuo $\mathcal{R}$ è quindi



b) Determina l'espressione del reddito reale complessivo RC_T percepito in un generico intervallo $[0,\ T]$. Calcolane il valore asintotico per T che tende all'infinito e determina quanti anni sarebbero necessari per ottenere il medesimo reddito complessivo in assenza di inflazione.

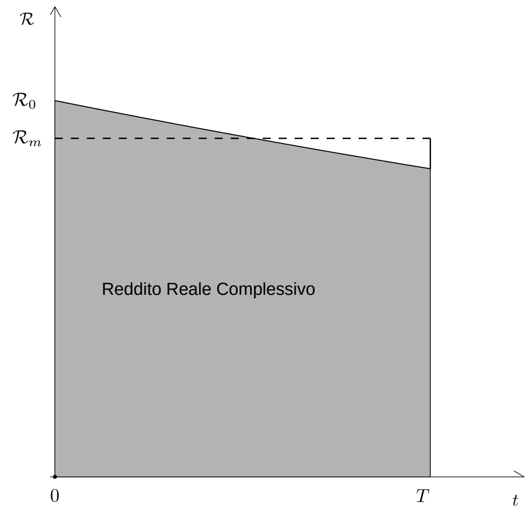
Il reddito reale complessivo si ottiene integrando il reddito annuale , ottenendo

$$\mathrm{RC}_T = \int_0^T \mathcal{R}_0 e^{-\frac{t}{40}} = \Big[-40\mathcal{R}_0 e^{-\frac{t}{40}} \Big]_0^T = 40\mathcal{R}_0(1 - e^{-\frac{T}{40}}).$$

Il valore asintotico è

$$\lim_{T\to+\infty} \mathrm{RC}_T = \lim_{T\to+\infty} 40\mathcal{R}_0(1 - e^{-\frac{T}{40}}) = 40\mathcal{R}_0.$$

Pertanto, se idealmente il reddito fosse percepito per un tempo infinito, l'ammontare complessivo corrisponderebbe a quello accumulato in 40 anni ad inflazione zero.



c) Calcola un'approssimazione, avente il primo decimale esatto, dell'istante T tale per cui il reddito **medio** annuale reale nell'intervallo $[0,\ T]$ (cioè il rapporto tra il reddito complessivo e la durata dell'intervallo di tempo) risulta pari al 90,6% del reddito iniziale $\mathcal{R}_0$.

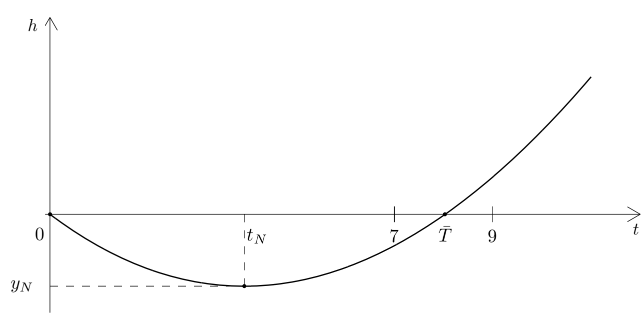
Il reddito **medio** annuale reale nell'intervallo intervallo $[0,\ T]$ è dato da

$$\mathcal{R}_m = \frac{\mathrm{RC}_T}{T} = \frac{40\mathcal{R}_0(1 - e^{-\frac{T}{40}})}{T},$$

pertanto, imponendo che $\mathcal{R}_m = 0,906\mathcal{R}_0$, si ottiene l'equazione

$$\frac{40\mathcal{R}_0(1 - e^{-\frac{T}{40}})}{T} = 0,906\mathcal{R}_0 \longleftrightarrow 40e^{-\frac{T}{40}} + 0,906T - 40 = 0.$$

Posto $h(t) = 40e^{-\frac{t}{40}} + 0,906t - 40$, occorre quindi trovare uno zero della funzione h per $t > 0$. Si osservi che la derivata $h'(t) = -e^{-\frac{t}{40}} + 0,906$ si annulla per $t_N = -40\ln(0,906) \approx 3,9$ anni, quando $h(t_N) \approx -0,18 < 0$. Ne consegue che la funzione h è decrescente e negativa nell'intervallo $]0,\ t_N[$ e crescente per $t > t_N$, con un andamento come riportato in figura:



Lo zero cercato è quindi nell'intervallo $t > t_N$. Sostituendo alcuni valori si ottiene che $h(8) < 0$ e $h(9) > 0$, pertanto, considerata la continuità della funzione e i suoi intervalli di monotonia monotonia, esiste un unico zero compreso tra 8 e 9 anni.

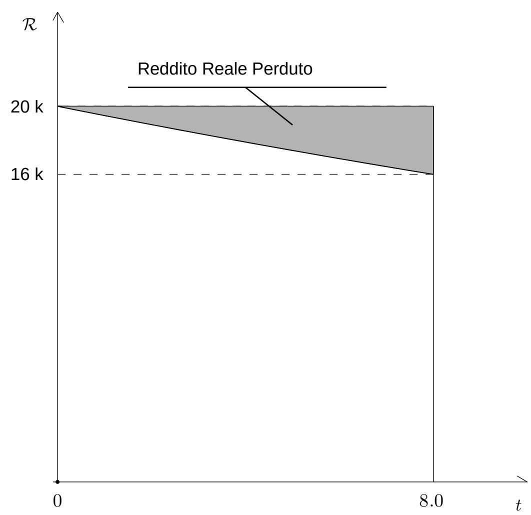
Per trovare lo zero si ricorre al metodo di bisezione. Le prime quattro iterazioni del metodo danno:

n	a_n	b_n	t_n	e_n	$h(t_n)$
0	8	9	8,5	0,5	> 0
1	8	8,5	8,25	0,25	> 0
2	8	8,25	8,125	0,125	> 0
3	8	8,125	8,0625	0,0625	> 0
4	8	8,0625	8,03125	0,03125	< 0

ove $t_n = (a_n + b_n)/2$ è la stima ottenuta alla n-esima iterazione e $e_n = (b_n - a_n)/2$ l'errore massimo di approssimazione. Lo zero cercato è pertanto nell'intervallo $]8; 8,0625[$, e la sua approssimazione con il primo decimale esatto è $\bar{T} = 8,0$ anni.

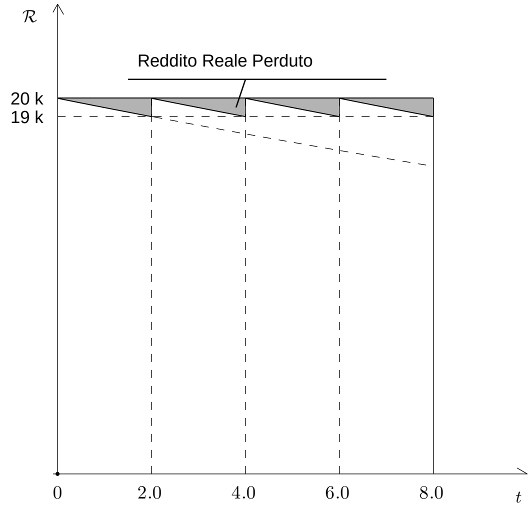
d) Verificato che l'istante di tempo richiesto nel punto precedente corrisponde a $T \approx 8,0$ anni, assumendo il reddito iniziale $\mathcal{R}_0$ pari a 20000 €/anno, traccia il grafico dell'andamento del RAR nell'intervallo tra 0 e 8 anni, e calcola l'ammontare complessivo di reddito (reale) che la persona ha perduto in tale intervallo di tempo.

Il reddito annuale passa dal valore iniziale di 20000 €/anno a un valore (approssimato all'unità) di 16375 €/anno al termine del periodo di 8 anni considerato. Il reddito reale perduto corrisponde alla differenza tra quello percepito in assenza di inflazione e quello reale in presenza di inflazione, cioè $\Delta\text{R} = \mathcal{R}_0 \cdot T - \mathcal{R}_m \cdot T = (1 - 0,906) \cdot 20000$ €/anno $\cdot\, 8,0$ anni $= 15040$ €.



e) Si assuma ora che, con cadenza biennale (cioè negli istanti $T = 2, \ldots, 8$), il datore di lavoro intervenga con un aumento (istantaneo) di stipendio che riporta il RAR al suo valore iniziale. Traccia il grafico dell'andamento del RAR, e determina in questo caso a quanto ammonta la perdita complessiva di reddito causata dall'inflazione nel medesimo intervallo di 8 anni.

Si osservi che in questo caso l'andamento del reddito annuo è discontinuo a causa dell'istantaneo aumento di stipendio, come illustrato nella seguente figura:



Utilizzando l'espressione RC_T ricavata nel punto b), si ottiene immediatamente che il reddito reale percepito nel primo biennio, che ovviamente corrisponde a quello dei tre bienni successivi, risulta

$$\mathcal{RC}_2 = 40 \cdot 20000(1 - e^{2/40}) \approx= 39016 \text{ €}.$$

Pertanto il reddito reale perduto totale è

$$\Delta\mathrm{R} = \mathcal{R}_0 \cdot 8 - \mathcal{RC}_2 \cdot 4 \approx 3936 \text{ €},$$

che risulta circa il 26% di quello perduto senza gli aumenti di stipendio.

Svolgimento Problema 2

a) Il candidato determini la legge $v(t)$ della velocità e la legge oraria $x(t)$ del moto, tenendo conto delle condizioni iniziali $v(0) = -1\,\mathrm{m/s}$ e $x(0) = 0\,\mathrm{m}$;

Nella risoluzione dei vari punti si ometteranno per semplicità le unità di misura delle grandezze, anche in considerazione del fatto che esse sono quelle standard del SI. Per integrazione diretta rispetto al tempo dell'accelerazione (considerato che l'intervallo d'interesse è $t \geq 0$) si trova che $v(t) = \ln(t+1) - \frac{1}{t+1} + c$. Imponendo al condizione $v(0) = -1\,\mathrm{m/s}$ si trova che la costante di integrazione c è nulla, quindi

$$v(t) = \ln(t+1) - \frac{1}{t+1}.$$

La legge oraria si trova per integrazione diretta della velocità. In questo caso occorre procedere per parti:

$$x(t) = \int \left(\ln(t+1) - \frac{1}{t+1} \right) dt = \int 1 \cdot \ln(t+1)\, dt - \ln(t+1) = t\ln(t+1) - \int \frac{t}{t+1}\, dt - \ln(t+1) =$$
$$= t\ln(t+1) - \ln(t+1) - \int \frac{t+1-1}{t+1}\, dt = t\ln(t+1) - \ln(t+1) - t + \ln(t+1) + c = t\ln(t+1) - t + c.$$

Imponendo al condizione $x(0) = 0\,\mathrm{m}$ si trova che la costante di integrazione c è nulla, quindi la legge oraria risulta

$$x(t) = t\ln(t+1) - t.$$

b) studi quindi la funzione $x(t)$ nel suo insieme di definizione (quindi anche per valori di t negativi), individuando in particolare un'approssimazione, a meno di un decimo di secondo, dell'istante in cui la velocità si annulla, e ne disegni il grafico Γ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale;

Il campo di esistenza della funzione x è $t > -1$. La posizione si annulla quando $t[\ln(t+1) - 1] = 0 \leftrightarrow t = 0 \vee \ln(t+1) = 1 \leftrightarrow t = 0 \vee t = e - 1$. Si riconosce immediatamente che la posizione x è positiva per istanti di tempo esterni a -1 e $e - 1$, negativa per istanti interni. I limiti alla frontiera sono

$$\lim_{t \to -1^+} t(\ln(t+1) - 1) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to +\infty} t[\ln(t+1) - 1] = +\infty,$$

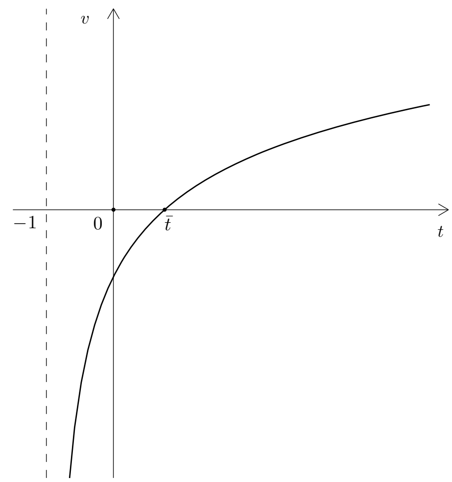
quindi $t = -1$ è asintoto verticale. Asintoti obliqui sono assenti poiché

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} [\ln(t+1) - 1] = +\infty.$$

La funzione è derivabile, con derivata prima data dalla velocità v e derivata seconda data dall'accelerazione a. Quest'ultima è sempre strettamente positiva per $t > -1$, quindi la concavità del grafico Γ è rivolta verso l'alto. La velocità v si annulla quando

$$v(t) = 0 \longleftrightarrow \ln(t+1) - \frac{1}{t+1} = 0,$$

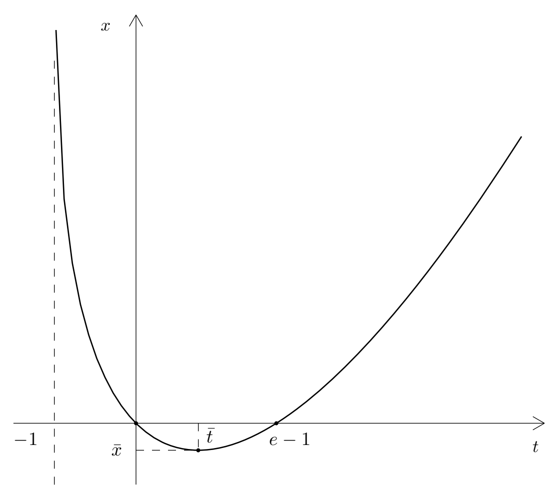
equazione di tipo trascendente, quindi non risolvibile in modo esatto. Si osservi che v è continua e derivabile, con derivata $v'(t) = a(t) > 0$ per ogni $t > -1$. Considerato che $v(0) = -1 < 0$ e $v(1) = \ln 2 - 1/2 > 0$, per il *Teorema degli Zeri* si deduce l'esitenza di almeno uno zero nell'intervallo $]0, 1[$. In considerazione di quanto ottenuto, il grafico della velocità risulta:



Considerata al monotonia di v tale zero è l'unico assunto dalla velocità. Per trovarne una approssimazione si ricorre al metodo di bisezione ottenendo le seguenti iterazioni:

n	a_n	b_n	t_n	e_n	$x(t_n)$
0	0	1	0,5	0,5	$-$
1	0,5	1	0,75	0,25	$-$
2	0,75	1	0,875	0,125	$+$
3	0,75	0,875	0,8125	0,0625	$+$

Dunque lo zero cercato è $\bar{t} = 0,8125 \pm 0,0625 \approx (0,8 \pm 0,1)$ s. La posizione x è quindi monotona decrescente per $-1 < t < \bar{t}$ e crescente per $t > \bar{t}$, essendo quindi la posizione minima assunta $\bar{x} = x(\bar{t}) \approx -0.33\,\mathrm{m}$. Il grafico della legge oraria è pertanto:



c) studi il limite asintotico di $v(t)$, $a(t)$ e del prodotto $a(t)v(t)$ al tendere di t a più infinito;

I primi due limiti non danno luogo a forme indeterminate e sono di agevole calcolo:

$$\lim_{t\to+\infty} a(t) = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}\right] = 0.$$

e

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln(t+1) - \frac{1}{t+1}\right] = +\infty.$$

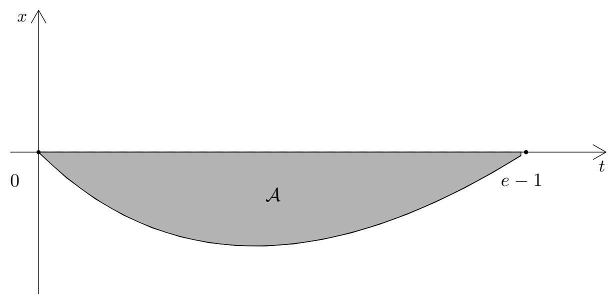
Il terzo è una forma indeterminata $[\infty \cdot 0]$ che richiede qualche manipolazione. Si osservi innanzitutto che l'infinito $\ln(t+1) - \frac{1}{t+1}$ è chiaramente equivalente a $\ln(t+1)$, poiché l'altro addendo tende a zero. L'infinitesimo $\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2}$ è invece equivalente a $\frac{1}{t+1}$, poiché l'altro termine infinitesimo è di ordine superiore. Il limite richiesto è quindi riconducibile alla seguente forma $[\infty/\infty]$ immediatamente risolubile applicando la relativa *regola di de L'Hospital*:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)a(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t+1)}{t+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{-1}{t+1}}{1} = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t+1} = 0.$$

d) calcoli l'area della regione di piano finita delimitata da Γ e dall'asse delle ascisse;

L'area $\mathcal{A}$ della regione è data da

$$\mathcal{A} = \int_0^{e-1} -x(t)\,dt = \int_0^{e-1} [t - t\ln(t+1)]\,dt.$$



L'integrale deve essere calcolato per parti, quindi è più agevole procedere individuando innanzitutto l'integrale indefinito di x:

$$\int -x(t)\,dt = \int [t - t\ln(t+1)]\,dt = \int t\,dt - \int t\ln(t+1)\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t+1}\,dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{t^2-1+1}{t+1}\,dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\int (t-1)\,dt + \frac{1}{2}\ln(t+1) =$$
$$= \frac{1-t^2}{2}\ln(t+1) + \frac{(t-1)^2}{4} + \frac{t^2}{2} + c.$$

L'area $\mathcal{A}$ della regione è quindi

$$\mathcal{A} = \Big[\frac{1-t^2}{2}\ln(t+1) + \frac{(t-1)^2}{4} + \frac{t^2}{2}\Big]_0^{e-1} = \cdots = \frac{e^2+5-4e}{4}$$

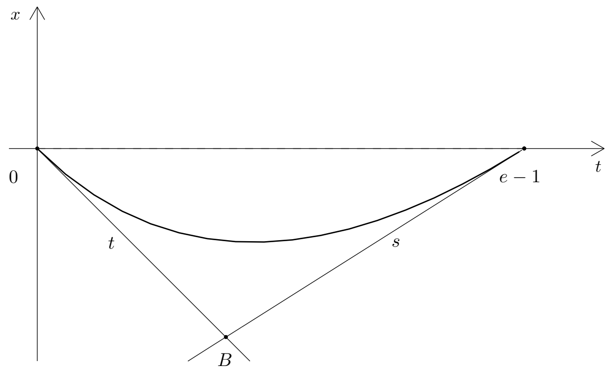
e) calcoli l'area del triangolo formato dall'asse delle ascisse e dalle rette tangenti a Γ nei suoi punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

La retta t tangente nell'origine ha equazione cartesiana

$$t:\ x = v(0)t = -t,$$

mentre la tangente s nel punto $A(e-1,\,0)$ ha equazione

$$s:\ x = v(e-1)(t-e+1) = (1-e^{-1})(t-e+1).$$



Il punto d'intersezione B delle due rette ha quindi ascissa soddisfacente l'equazione

$$-t = (1 - e^{-1})(t - e + 1) \leftrightarrow \frac{(e-1)^2}{e} = t\frac{2e-1}{e} \leftrightarrow t = \frac{(e-1)^2}{2e-1},$$

pertanto $x_B = -t_B = \frac{(e-1)^2}{2e-1}$. L'area del triangolo è dunque

$$\mathcal{A}_T = -\frac{y_B x_A}{2} = \frac{(e-1)^3}{4e-2}.$$

Svolgimento Quesiti

① Trova l'integrale generale dell'equazione differenziale $y^2y' = 2x$ e la soluzione particolare tale per cui $y(1) = 2$, verificando che questa soluzione, come necessario, è derivabile in $\mathbb{R}$. È corretto affermare che la funzione $y = \sqrt[3]{3x^2 - 3}$ soddisfa l'equazione differenziale su tutto $\mathbb{R}$?

L'equazione è a variabili separabili pertanto, per integrazione diretta, si ottiene

$$\int y^2\, dy = \int 2x\, dx \leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = x^2 + c', \quad \text{con } c' \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, posto $c = 3c'$, l'integrale generale dell'equazione risulta

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + c}, \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$ si trova $2 = \sqrt[3]{3 + c}$ per cui $c = 5$. La soluzione risulta quindi $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 5}$, che è continua e derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}$, essendo l'argomento del radicale maggiore o uguale a 5.
La funzione $g(x) = \sqrt[3]{3(x^2 - 1)}$ è definita e continua su $\mathbb{R}$, tuttavia è derivabile ovunque fuorché per $x = \pm 1$, punti in cui si annulla il radicando. In tali punti speciali la funzione ammette infatti un flesso verticale, come è facile verificare con il *criterio di derivabilità*:

$$D_{\pm}g(1) = \lim_{x \to 1^{\pm}} Dg(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{2x}{\sqrt[3]{9(x^2 - 1)^2}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty.$$

È dunque scorretto affermare che g soddisfa l'equazione differenziale su tutto $\mathbb{R}$. Si può infine dimostrare che l'unica funzione continua e derivabile su $\mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione differenziale e che, parimenti a g, si annulla in $x = \pm 1$, è la soluzione banale $y = 0$.

② Sono date due rette r e s di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Dimostra che r e s sono sghembe, determina l'equazione cartesiana del piano α contenente r e parallelo a s, calcola la distanza tra le due rette.

Mettendo a sistema le equazioni parametriche si trova:

$$\begin{cases} 0 = t + 1 \\ k = 2t \\ k = t \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ k = -2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Tale sistema è impossibile poiché contiene condizioni contraddittorie, pertanto le due rette non hanno punti in comune. D'altra parte le rette non possono essere parallele, dato che i vettori $\vec{v}_r(0, 1, 1)$ e $\vec{v}_s(1, 2, 1)$, che ne individuano le direzioni, non sono proporzionali. Se ne deduce pertanto che le rette sono sghembe.
Le equazioni parametriche del piano α, che contenendo r deve passare per l'origine, si ottengono per combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$:

$$\alpha : \begin{cases} x = t \\ y = k + 2t \\ z = k + t \end{cases}, \; k, t \in \mathbb{R}.$$

Ricavando i parametri t ed k dalle prime due equazioni parametriche e sostituendo nella terza si ottiene l'equazione cartesiana

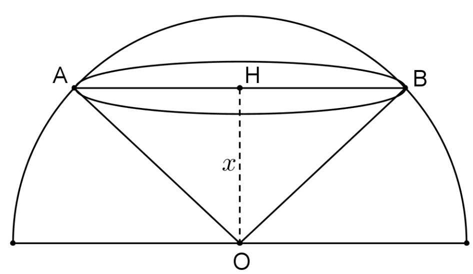
$$\alpha : z = (y - 2x) + x \leftrightarrow x - y + z = 0.$$

La distanza tra le due rette sghembe corrisponde alla distanza tra il piano α e la retta s, ovvero alla distanza tra α e un punto qualunque di s, ad esempio $P(1,\, 0,\, 0)$.
Per calcolare siffatta distanza si può ricorrere alla formula della distanza punto-piano:

$$d(P,\, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + c_z 0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

③ In una semicirconferenza di centro O si consideri un triangolo isoscele avente per base una corda AB parallela al diametro e vertice in O; si faccia ruotare tale triangolo intorno all'asse della base AB. Tra tutti i possibili triangoli che rispondono alle condizioni richieste, per quale distanza di AB da O si ottiene il cono di volume massimo?

Sia H il punto medio del segmento AB; la richiesta è di far ruotare il triangolo intorno a OH. Seguendo le indicazioni del testo, si porrà uguale a x la distanza OH del segmento AB dal centro O. Le limitazioni geometriche da imporre sulla incognita sono quindi: $0 < x < r$. Il cono così formato ha raggio di base $r_b = AH$ e altezza $h = OH = x$.



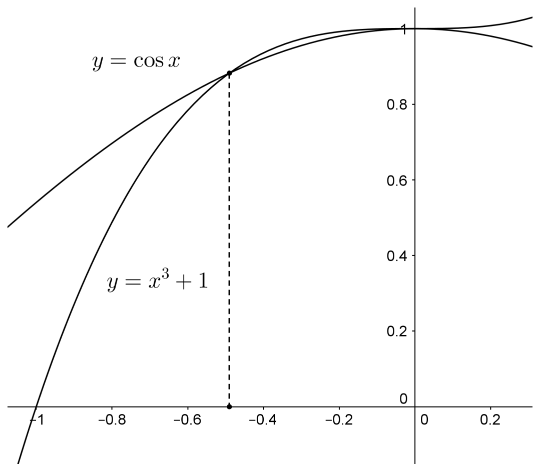
Detto r il raggio della semicirconferenza di partenza, si avrà, per il *teorema di Pitagora*, che $r_b = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Il volume del cono si calcolerà dunque in questo modo:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r_b^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi(r^2 - x^2) \cdot x\,.$$

Prescindendo dalle costanti moltiplicative, si studierà la funzione $y = r^2x - x^3$, dove il parametro x è soggetto alle limitazioni $0 \leq x \leq r$; la derivata della funzione è $y' = r^2 - 3x^2$, che si annulla in $x = -(\sqrt{3}/3)r$ e in $x = (\sqrt{3}/3)r$. Il primo valore evidentemente è privo di significato geometrico; il massimo si ottiene dunque per $x = (\sqrt{3}/3)r$, come si può agevolmente dimostrare studiando i segni della derivata (tale dimostrazione viene lasciata per esercizio allo studente).

④ Dimostrare che le funzioni $y = \cos x$ e $y = x^3 + 1$ hanno due intersezioni reali e distinte. Con uno dei metodi noti, individuare, con un'approssimazione minore di 1/20, l'ascissa di quella diversa da zero.

Per iniziare si osservi che la funzione $y = \cos x$ è limitata, avendo insieme immagine $[-1,\, 1]$, mentre la funzione $y = x^3 + 1$ ha per insieme immagine $\mathbb{R}$; le intersezioni, ove presenti, andranno cercate nell'intervallo $y \in [-1,\, 1]$. Il testo suggerisce la presenza di un'intersezione per $x = 0$, la cui esistenza si verifica immediatamente: ambedue le funzioni passano infatti per il punto $(0,\, 1)$. Si deve quindi cercare l'ascissa dell'altro punto di intersezione. La funzione $y = x^3 + 1$ è ovunque derivabile ed ha derivata $y' = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \neq 0$; ne consegue che essa è sempre crescente, se si eccettua il suo punto stazionario $x = 0$ (che si verifica agevolmente essere un flesso orizzontale crescente). Quindi per valori di $x > 0$ la funzione $y = x^3 + 1$ ha ordinata maggiore di 1, e non può avere punti di intersezione con $y = \cos x$. Il secondo punto di intersezione va dunque cercato per valori di x negativi. Si dimostrerà ora che tale punto è compreso nell'intervallo $[-1,\, -1/10[$. Si consideri infatti la funzione $h(x) = x^3 - 1 - \cos x$ agli estremi dell'intervallo $[-1,\, -1/10]$: $h(-1) = (-1)^3 - \cos(-1) \simeq -0,54$ e $h(-1/10) = (-1/10)^3 - \cos(-1/10) \simeq 0,004$. Essendo la funzione h continua, per il *teorema degli zeri* è necessariamente presente uno zero nell'intervallo considerato. Si calcolerà ora la sua ascissa col *metodo di bisezione*: per comodità di calcolo l'intervallo di partenza sarà $[-1,\, 0]$ e non $[-1,\, -1/10]$.



$$\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad h\left(-\frac{1}{2}\right) \simeq -0,0026 \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2},\, 0\right[\ ;$$

$$\frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad h\left(-\frac{1}{4}\right) \simeq 0,015 \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{4}\right[\ ;$$

$$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8} \quad \rightarrow \quad h\left(-\frac{3}{8}\right) \simeq 0,016 \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2},\, -\frac{3}{8}\right[\ ;$$

$$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}{2} = -\frac{7}{16} \quad \rightarrow \quad h\left(-\frac{7}{16}\right) \simeq 0,010 \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2},\, -\frac{7}{16}\right[\ ;$$

$$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{7}{16}}{2} = -\frac{15}{32} \quad \rightarrow \quad h\left(-\frac{15}{32}\right) \simeq 0,0049 \quad \Rightarrow \quad x \in \left]-\frac{1}{2},\, -\frac{15}{32}\right[\ .$$

L'intervallo così ottenuto, $]-\frac{1}{2},\, -\frac{15}{32}[$, ha ampiezza pari a $-\frac{15}{32} + \frac{1}{2} = \frac{1}{32} < \frac{1}{20}$; pertanto la soluzione appartiene all'intervallo considerato, con l'approssimazione richiesta.

⑤ Una funzione continua f è tale che la sua media integrale nell'intervallo $[a,\, b]$ sia uguale ad $a+b$. Dimostrare che la condizione è soddisfatta dalla funzione $f(x) = 2x$, mentre non è soddisfatta da una funzione del tipo $f(x) = 2x + k$ con k reale non nullo.

La media integrale di una funzione su un intervallo $[a,\, b]$, per definizione, si calcola in questo modo:

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a} \, .$$

Il dato del problema è che tale media sia uguale ad $a + b$ si può pertanto scrivere:

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a} = b + a \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = b^2 - a^2 \, .$$

Per la *formula fondamentale del calcolo integrale* risulta che

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,,$$

dove F è una qualsiasi primitiva della funzione f di partenza. Si supponga dunque che sia $f(x) = 2x$: l'insieme delle sue primitive $F(x)$ è:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C$$

dove C è una costante reale. Si calcoli ora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [x^2 + C]_a^b = b^2 + C - (a^2 + C) = b^2 - a^2\,.$$

La funzione $f(x) = 2x$ soddisfa pertanto la richiesta. Se si prende invece $f(x) = 2x + k$ si ottiene, ripercorrendo agli stessi passaggi:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (2x + k)dx = x^2 + kx + C$$

e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [x^2 + kx + C]_a^b = b^2 + kb + C - (a^2 + ka + C) = b^2 - a^2 + k(b - a)\,.$$

Evidentemente, l'unico valore di k accettabile è zero, come indicato dal testo del problema.

⑥ La formula per la derivazione di un prodotto di funzioni prende il nome di "regola di Leibniz", dal nome dello scienziato e filosofo tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz, morto 300 anni fa (1716). Il candidato enunci e dimostri tale formula, e la applichi per calcolare la derivata della funzione $y = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$.

La formula di Leibniz è la seguente: $(fg)' = f'g + g'f$. Più precisamente, se due funzioni f e g sono derivabili in un punto x, allora anche la funzione prodotto fg è derivabile in x e vale $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$. Per dimostrare questa proprietà ci si serve della definizione di derivata, nel seguente modo:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\,;$$

si può ora sottrarre e sommare al numeratore un termine $f(x)g(x + h)$:

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\,.\end{aligned}$$

Si osservi ora che $g(x + h) \to g(x)$, poiché la funzione g è continua in x, in quanto ivi derivabile, mentre $f(x)$ è una costante e può essere portata fuori del segno di limite. Si può quindi concludere che

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\,.$$

Si applichi ora la formula alla funzione $y = \sqrt{x}\ln\sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})' = (\sqrt{x})'\ln\sqrt{x} + \sqrt{x}(\ln\sqrt{x})',$$

pertanto, in base alle note regole di derivazione, si ottiene

$$(\sqrt{x}\ln\sqrt{x})' = (\sqrt{x})'\ln\sqrt{x} + \sqrt{x}(\ln\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x} + 1)\,.$$

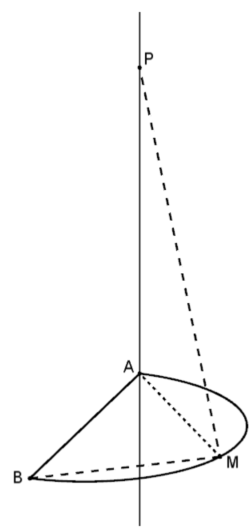
⑦ Si calcoli il limite per $x \to +\infty$ della funzione $x^6 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$.

Il limite richiesto si presenta in una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Esso si riconduce facilmente a un limite notevole noto, grazie alla sostituzione $t = \frac{1}{x^3}$; infatti, effettuata la sostituzione, il limite diventa:

$$\lim_{x \to +\infty} x^6 \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}\,.$$

⑧ Si consideri una circonferenza γ di diametro AB appartenente a un piano α. Si conduca da A una retta perpendicolare ad α; sia P un suo punto qualunque. Detto M un punto di γ, si dimostri che l'angolo $\widehat{PMB}$ è retto.

La tesi segue dal *teorema delle tre perpendicolari*. Enunciamo il teorema:
Ipotesi: sia dato un piano α; sia r una retta perpendicolare ad α avente in comune con esso un punto P; si prenda una qualunque retta di t di α e si conduca da P la perpendicolare a t, che incontrerà t in Q.
Tesi: la retta condotta per un qualsiasi punto di r e Q è perpendicolare a t.
Nel presente quesito vale in teorema appena illustrato, come si può facilmente vedere in figura.



Infatti α è il piano contenente la circonferenza e AP la retta r. La retta per B e M è t, appartenente al piano α. Infine, M è il piede della perpendicolare condotta da A alla retta BM; ciò consegue dal fatto che l'angolo $\widehat{AMB}$ è retto in quanto il triangolo AMB è inscritto in una semicirconferenza. In conclusione, PM è perpendicolare a BM e pertanto l'angolo $\widehat{PMB}$ è retto.