# Anno Scolastico 2016 - 2017

## 24 maggio 2017 - Esercitazione Prova Scritta di Matematica

Il candidato svolga, a sua scelta, uno dei problemi e quattro dei quesiti proposti.

❶ Secondo una legge formulata da Newton, un oggetto caldo a temperatura $T$ che si trova a contatto con aria a temperatura costante $T_a$ (con $T > T_a$), si raffredda con una velocità proporzionale al salto di temperatura $\Delta T = T - T_a$. Il processo di raffreddamento può essere dunque studiato con l'equazione differenziale

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T).$$

dove $k$ è una costante che dipende dalla superficie, dalla massa e dal materiale di cui è composto l'oggetto.

a) Il candidato consideri un blocchetto di alluminio a temperatura iniziale di $120°$ situato in aria a $20°$ e individui la funzione che descrive l'andamento della temperatura dell'oggetto in funzione del tempo. Se il tempo $t$ è espresso in minuti, calcoli (con l'aiuto di una calcolatrice) il valore della costante $k$ per cui il blocchetto dimezza la sua temperatura iniziale in 10 minuti, verificando che esso è circa $0,092$.

b) Una volta controllato che la legge che descrive la temperatura nella scala Celsius in funzione del tempo è $T(t) = 20 + 100e^{-kt}$, col valore di $k$ precedentemente trovato, il candidato disegni il grafico di tale funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

c) Nel laboratorio in cui è situato l'oggetto, un recipiente contenente una soluzione di cloruro di sodio viene riscaldato molto lentamente da un fornello elettrico; la legge che descrive la temperatura della soluzione nella scala Celsius è $T = 20 + t$. Si calcoli, con un errore di approssimazione inferiore ai 2 secondi, l'istante di tempo in cui la temperatura della soluzione sarà uguale a quella del blocchetto.

d) Si calcoli la temperatura media del blocchetto nell'intervallo di tempo $0 - 30$ minuti.

e) Per motivi legati a uno studio informatico del fenomeno, si decide di approssimare la funzione studiata in precedenza con una funzione razionale: spiegare, con l'aiuto eventuale di opportuni grafici, quale fra le seguenti funzioni ha l'andamento maggiormente compatibile con i dati assegnati nel punto a) e con l'andamento del grafico disegnato al punto b):

$$I)\ y = 120 - 6t \qquad II)\ y = 58 + 120/t \qquad III)\ y = 20 + \frac{20000}{3t^2 + 200} \qquad IV)\ y = 20 + \frac{20000}{3t + 200}$$

❷ Data la funzione definita a tratti con legge

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x+2) & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ bx(2-x) & \text{se } 0 < x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ove $a$, $b$ sono due parametri reali non negativi, il candidato:

a) tracci il grafico $\gamma$ della funzione $f$ per una coppia di generici parametri, quindi provi che $f$ risulta densità di probabilità di una variabile aleatoria continua $X$ se e solo se $a + b = \frac{3}{4}$;

b) dimostri che per ogni assegnato $\mu \in [-1,\, 1]$, esiste ed è unica la coppia $(a,\, b)$ di valori dei parametri tale per cui $\mu$ risulta il valore medio della variabile aleatoria $X$ ed in particolare $\mu = \frac{4}{3}(b - a)$;

c) fissati $a = 0$ e $b = \frac{3}{4}$, studi la funzione di ripartizione $F$ della variabile aleatoria $X$, ovvero la funzione integrale definita ponendo

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

e ne tracci il grafico in un riferimento cartesiano;

d) studi l'esistenza della derivata seconda della funzione $F$ studiata nel punto precedente nei punti del suo dominio;

e) calcoli, in funzione dei parametri $a$ e $b$, il volume ottenuto da una rotazione completa della regione di piano racchiusa da $\gamma$, grafico della densità di probabilità di $X$, e dall'asse $x$, dimostrando che tale volume è minimo per $a = b$.

**Quesiti**

① Si sezioni un cubo con tre piani paralleli alle facce del cubo medesimo.

1. Quale deve essere la posizione reciproca dei piani affinché essi suddividano il cubo in otto cubi più piccoli?
2. Dimostrare che la somma dei volumi delle sfere inscritte nei cubi più piccoli è uguale al volume della sfera inscritta nel cubo di partenza.

② Sono date due rette $r$ e $s$ di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = k + 1 \\ y = 2k + a \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = bt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Si determinino i valori dei parametri $a$ e $b$ tali per cui $r$ e $s$ sono incidenti e perpendicolari. Dopo avere individuato le coordinate del punto comune a $r$ ed $s$, si determini l'equazione del piano individuato da tali rette.

③ 400 anni fa moriva il matematico, astronomo e fisico scozzese John Napier (1550-1617), inventore dei logaritmi naturali o neperiani. Il candidato esponga e illustri la formula che permette di passare dal logaritmo decimale al logaritmo neperiano, e calcoli, con l'aiuto di una calcolatrice, la costante di proporzionalità che lega i due tipi di logaritmo.

④ Si considerino tutti i triangoli isosceli per i quali è costante la somma della base con l'altezza. Si individui fra essi quello avente perimetro massimo.

⑤ Si calcoli il valore del parametro $a$ per cui $\int_1^a \ln x dx = 1$.

⑥ Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1+t)\, dt}{x^4}.$$

⑦ Dimostrare che il valor medio di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme e continua in un intervallo $[a, b]$ corrisponde alla media aritmetica di $a$ e $b$.

⑧ Si determini il valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ tale per cui l'equazione differenziale $y'' + cy = 4$ ammette soluzioni periodiche di periodo $\pi$. Per tale valore di $c$ si trovi la soluzione soddisfacente le condizioni iniziali $y(0) = 2 \wedge y'(0) = 2$, e di essa si determinino il massimo e il minimo valore.

## Svolgimento Problema 1

a) Il candidato consideri un blocchetto di alluminio a temperatura iniziale di $120°$ situato in aria a $20°$ e individui la funzione che descrive l'andamento della temperatura dell'oggetto in funzione del tempo. Se il tempo $t$ è espresso in minuti, calcoli (con l'aiuto di una calcolatrice) il valore della costante $k$ per cui il blocchetto dimezza la sua temperatura iniziale in 10 minuti, verificando che esso è circa $0,092$.

La funzione cercata è soluzione del seguente problema di Cauchy del primo ordine:

$$\begin{cases} T' + kT = k20 \\ T(0) = 120 \end{cases},$$

L'equazione omogenea associata ha integrale generale $T_{\text{om}} = Ae^{-kt}$, mentre la completa ammette $y_{\text{p}} = 20$ come soluzione particolare. L'integrale generale dell'equazione completa è pertanto

$$T = Ae^{-kt} + 20.$$

Imponendo la condizione iniziale $T(0) = 120$ si trova che $A = 100$, pertanto la funzione cercata è

$$T = 20 + 100e^{-kt}.$$

Se dopo 10 minuti la temperatura si dimezza, dovrà essere

$$60 = 20 + 100e^{-k10} \longleftrightarrow e^{-k10} = 0.4 \longleftrightarrow k = -0.1\ln(0.4) \approx 0.092$$

b) Una volta controllato che la legge che descrive la temperatura nella scala Celsius in funzione del tempo è $T(t) = 20 + 100e^{-kt}$, col valore di $k$ precedentemente trovato, il candidato disegni il grafico di tale funzione in un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale.

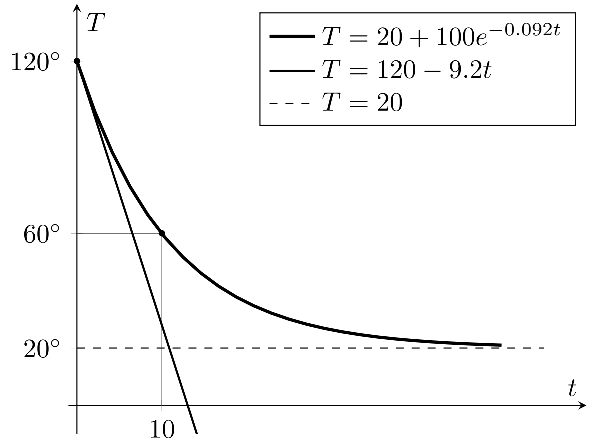
La funzione da studiare è $T(t) = 20 + 100e^{-0.092t}$ nell'intervallo $t \geq 0$. Il grafico, a parte la traslazione di vettore $\vec{v}(0,\, 20)$, è quello di una funzione esponenziale, pertanto per studiarne l'andamento sarà sufficiente determinare monotonia e valore asintotico. Il valore asintotico è

$$\lim_{t\to+\infty}(20 + 100e^{-0.092t}) = 20,$$

il grafico ha pertanto un asintoto orizzontale di equazione $T = 20$. La monotonia è decrescente, infatti $T' = -100ke^{-kt} < 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il punto di massimo assoluto è quindi $M(0,\, 120)$. La concavità, come per ogni altra funzione esponenziale, è rivolta verso l'alto, infatti $T'' = 100k^2e^{-kt} > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.
La tangente nell'origine ha pendenza $T'(0) = -100k = -9.2$ e quindi ha equazione

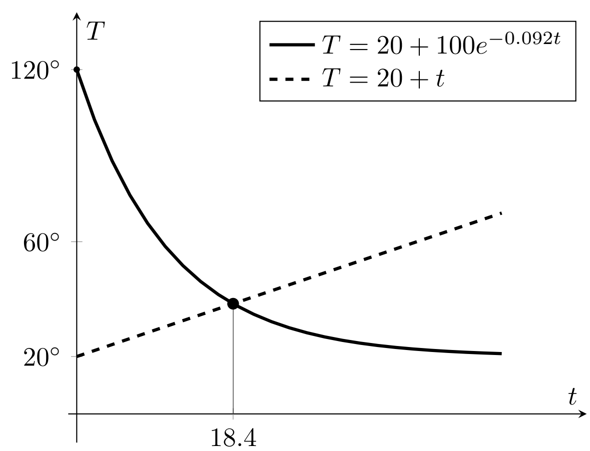
$$T = T = 120 - 9.2t.$$

Il grafico della funzione è quindi il seguente




c) Nel laboratorio in cui è situato l'oggetto, una recipiente contente una soluzione di cloruro di sodio viene riscaldato molto lentamente da un fornello elettrico e la legge che descrive la temperatura della soluzione nella scala Celsius è $T = 20 + t$. Si calcoli, con un errore di approssimazione inferiore ai 2 secondi, l'istante di tempo in cui la temperatura della soluzione sarà uguale a quella del blocchetto.

Dall'esame dei grafici delle due funzioni, uno decrescente e l'altro crescente, si riconosce immediatamente che esiste un unico istante in cui il blocchetto e la soluzione si trovano alla stessa temperatura:




Più formalmente, il problema si può ricondurre alla ricerca degli zeri della funzione $h(t) = 20+100e^{-0.092t}-(20+t) = 100e^{-0.092t}-t$. Questa è continua e derivabile, con derivata $h'(t) = -9.2e^{-0.092t}-1$ strettamente negativa. Trattasi pertanto di una funzione decrescente. Poiché $h(18) \approx 1.09 > 0$ e $h(19) \approx -1.59 < 0$, in virtù del *Teorema degli Zeri*, la funzione ammette un unico zero nell'intervallo $]18, 19[$. L'approssimazione cercata deve avere un errore inferiore a 2 s, ovvero a 1/30 min, pertanto con il metodo di bisezione è sufficiente effettuare quattro iterazioni, che portano l'errore massimo a a 1/32:

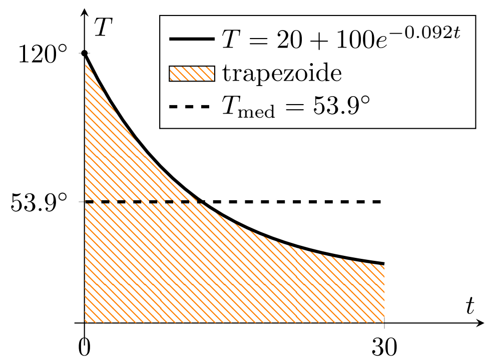
| $n$ | $a_n$ | $t_n$ | $b_n$ | $h(a_n)$ | $h(t_n)$ | $h(b_n)$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 18.000 | 18.500 | 19.000 | + | - | - | 0.5000 |
| 1 | 18.000 | 18.250 | 18.500 | + | + | - | 0.2500 |
| 2 | 18.250 | 18.375 | 18.500 | + | + | - | 0.1250 |
| 3 | 18.375 | 18.438 | 18.500 | + | - | - | 0.0625 |
| 4 | 18.375 | 18.406 | 18.438 | + | - | - | 0.0313 |

ove $t_n = (a_n + b_n)/2$ è la stima ottenuta alla $n$-esima iterazione e $e_n = (b_n - a_n)/2$ l'errore massimo di approssimazione. Lo zero cercato è pertanto nell'intervallo $]18.375, 18.438[$, e la sua approssimazione con il primo decimale esatto è $t = (18.406 \pm 0.0313)$ min, che in secondi può scriversi $t = (1104.4 \pm 1.9)$ s, ovvero, riducendo l'errore ad uns cifra significativa, $t = (1104 \pm 2)$ s.

d) Si calcoli la temperatura media del blocchetto nell'intervallo di tempo 0 – 30 minuti.

Per definizione, la temperatura media è data da

$$T_{\text{med}} = \frac{\int_0^{30}(20 + 100e^{-0.092t})\,dt}{30} = \frac{\left[20t - \frac{100}{0.092}e^{-0.092t}\right]_0^{30}}{30} = 20 + \frac{100}{2.76}(1 - e^{-2.76}) = 53.9^\circ$$




e) Per motivi legati a uno studio informatico del fenomeno, si decide di approssimare la funzione studiata in precedenza con una funzione razionale: spiegare, con l'aiuto eventuale di opportuni grafici, quale fra le seguenti funzioni ha l'andamento maggiormente compatibile con i dati assegnati nel punto a) e con l'andamento del grafico disegnato al punto b):

$$y = 120 - 6t \qquad y = 58 + 120/t \qquad y = 20 + \frac{20000}{3t^2 + 200} \qquad y = 20 + \frac{20000}{3t + 200}$$

Tutte e quattro le funzioni sono evidentemente decrescenti, come la funzione studiata. La prima funzione assume il corretto valore per $t = 0$, ma evidentemente per $t \to +\infty$ invece di convergere a 20, tende a $-\infty$. La seconda funzione non è nemmeno definita in $t = 0$ e comunque per $t \to +\infty$ essa convergere a 58. Le ultime due soddisfano la condizione iniziale $T(0) = 120$ ed entrambe tendono a 20 per $t \to +\infty$. La prima per $t = 10$ dà $T(10) = 60$, mentre la seconda dà $T(10) \approx 107$. La funzione con andamento maggiormente compatibile è quindi la terza del gruppo, perché dopo 10 minuti prevede il dimezzamento della temperatura iniziale.

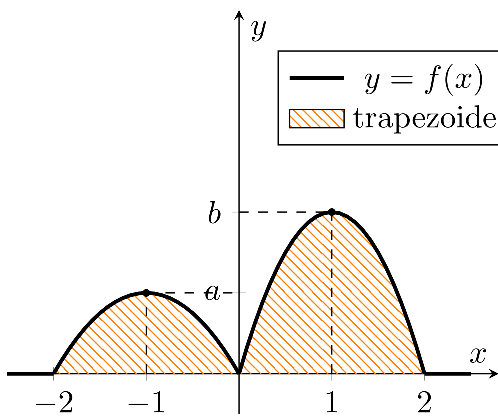
## Svolgimento Problema 2

a) tracci il grafico $\gamma$ della funzione $f$ per una coppia di generici parametri, quindi provi che $f$ risulta densità di probabilità di una variabile aleatoria continua $X$ se e solo se $a+b=\frac{3}{4}$;

Nella striscia di piano $0 \le x \le 2$, il grafico della funzione $f$ è:

- se $b > 0$ : un'arco di parabola con vertice $V_b(1,\, b)$ e intersezioni con l'asse delle $x$ nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 2$;
- se $b = 0$ : il segmento staccato dalla striscia sull'asse $x$.

Analoghe considerazioni valgono nella striscia di piano $-2 \le x \le 0$, mentre per $x < -2$ o $x > 2$ il grafico coincide con l'asse $x$. Nel caso in cui entrambi i parametri sino non nulli il grafico è del tipo:




La funzione $f$ è densità di probabilità se e solo se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, ovvero se la somma delle aree dei due segmenti parabolici in figura è unitaria. In virtù del *Teorema di Archimede*, ciò equivale a

$$\frac{2}{3}\cdot 2\cdot y_{V_a} + \frac{2}{3}\cdot 2\cdot y_{V_b} = 1 \longleftrightarrow \frac{4}{3}(a+b) = 1 \longleftrightarrow a+b = \frac{3}{4}.$$

b) dimostri che per ogni assegnato $\mu \in [-1,\, 1]$, esiste ed è unica la coppia $(a,\, b)$ di valori dei parametri tale per cui $\mu$ risulta il valore medio della variabile aleatoria $X$ ed in particolare $\mu = \frac{4}{3}(b-a)$;

Il valore medio $\mu$ è dato dall'integrale

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = a\int_{-2}^{0} x^2(-x-2)\,dx + b\int_{0}^{2} x^2(2-x)\,dx.$$

I due integrali nella precedente formula sono opposti ed in particolare si trova che

$$\int_{-2}^{0} x^2(-x-2)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\frac{4}{3} \qquad \int_{0}^{2} x^2(2-x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} = \frac{4}{3},$$

pertanto risulta $\mu = \frac{4}{3}(b-a)$.

Dato un valore $\mu \in [-1,\, 1]$, occorre provare che è unica la coppia di parametri non negativi $(a,\, b)$ tale per cui

$$\begin{cases} b-a = \frac{3}{4}\mu \\ a+b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che l'unica soluzione del problema è

$$\begin{cases} a = \frac{3}{8}(1-\mu) \\ b = \frac{3}{8}(1+\mu) \end{cases}$$

ed è immediato costatare che tale soluzione è accettabile, infatti $a \geq 0 \wedge b \geq 0$ equivale proprio a $\mu \in [-1,\, 1]$.

c) fissati $a = 0$ e $b = \frac{3}{4}$, studi la funzione di ripartizione $F$ della variabile aleatoria $X$, ovvero la funzione integrale definita ponendo

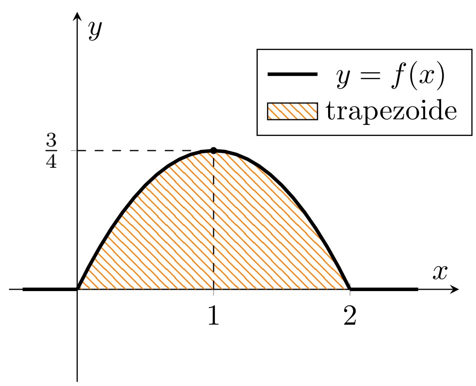
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

e ne tracci il grafico in un riferimento cartesiano;

La funzione $f$ è

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e il suo grafico risulta:



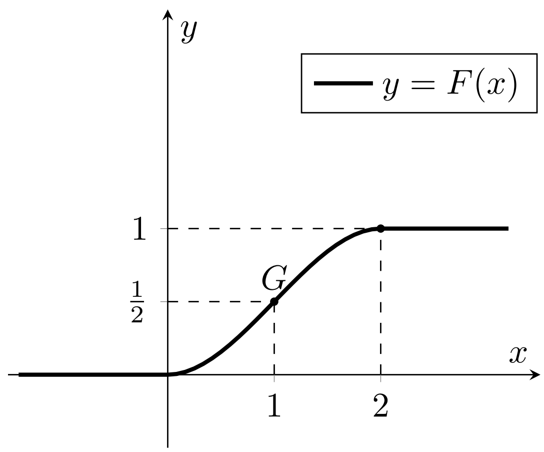

La funzione di ripartizione sarà anch'essa definita a tratti. In particolare risulta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{3}{4}x(2-x)\, dx & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \int_0^2 \frac{3}{4}x(2-x) & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Integrando il polinomio di secondo grado si trova

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{se } 2 < x \end{cases}$$

Essendo $f$ continua, per il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* la funzione $F$ risulta continua e derivabile, con derivata $F'(x) = f(x)$. Ci si può inoltre limitare allo studio della funzione nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ in cui $F$ non è costante.
La monotonia deriva dal segno di $f$, pertanto nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$ la funzione è strettamente crescente con due punti stazionari $x = 0$ e $x = 2$. Considerata la monotonia di $f$, si può dedurre che $F''(x) = f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $F''(x) = f'(x) < 0$ per $1 < x < 2$ e $F''(1) = f'(1) = 0$. Pertanto la concavità di $F$ è rivolta verso l'alto nell'intervallo $0 < x < 1$, verso il basso nell'intervallo $0 < x < 1$, mentre in $x = 1$ il grafico ha un flesso ascendente $G(1,\, \frac{1}{2})$.
Da tutte queste considerazioni, il grafico risulta:




d) studi l'esistenza della derivata seconda della funzione $F$ studiata nel punto precedente nei punti del suo dominio;

Ricordando che nel punto precedente si è provato che $F' = f$, il problema equivale a studiare l'esistenza della derivata prima della funzione $f$ in $\mathbb{R}$. Dal grafico riportato nel punto c) si intuisce che la funzione $f$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} - 0, 2$, mentre $x = 0$ e $x = 2$ sono punti angolosi. Infatti, dal calcolo diretto si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x) & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

Per quanto concerne i due punti speciali $x = 0$ e $x = 2$, utilizzando il *criterio di derivabilità* si ottiene:

$$D_- f(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \qquad D_+ f(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3}{2}(1-x) = \frac{3}{2},$$

e

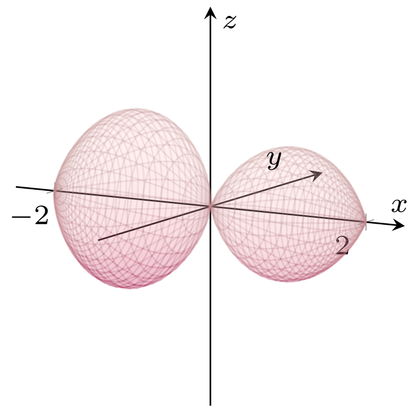
$$D_- f(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{3}{2}(1-x) = -\frac{3}{2} \qquad D_+ f(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0.$$

Quanto trovato conferma il fatto che i due punti speciali sono punti angolosi.

e) calcoli, in funzione dei parametri $a$ e $b$, il volume ottenuto da una rotazione completa della regione di piano racchiusa da $\gamma$, grafico della densità di probabilità di $X$, e dall'asse $x$, dimostrando che tale volume è minimo per $a = b$.

Il volume del solido di rotazione è dato dalla nota formula

$$V = \pi \int_{-2}^{2} f^2(x)\, dx.$$




Spezzando il precedente integrale sui due tratti di definizione di $f$, si ottiene

$$V = \pi a^2 \int_{-2}^{0} x^2(x+2)^2\,dx + \pi b^2 \int_{0}^{2} x^2(2-x)^2\,dx.$$

Per ragioni di simmetria i due precedenti integrali devono necessariamente coincidere, pertanto

$$V = \pi k(a^2+b^2),$$

ove

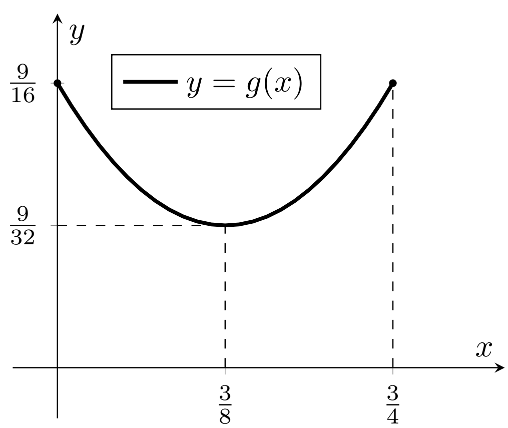
$$k = \int_0^2 x^2(2-x)^2\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{15}.$$

Ora occorre tener presente che i parametri sono soggetti alle seguenti condizioni: $a+b=\frac{3}{4}$ e $a,b \geq 0$. Conviene qui porre $x=a$, con $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$, da cui si ottiene

$$V = \frac{16}{15}\pi\left[x^2 + \left(\frac{3}{4}-x\right)^2\right] = \frac{16}{15}\pi\left(2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) = \frac{16}{15}\pi g(x),$$

ove $g(x) = 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$ in $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$. Per conoscere massimi e minimi di $V$ è sufficiente studiare l'andamento della parabola $g$, il cui vertice è $V(\frac{3}{8}, \frac{9}{32})$ e agli estremi dell'intervallo si ha $g(0) = g(3/4) = \frac{9}{16}$.

Il grafico dell'arco di parabola interessato è quindi




Pertanto il volume $V$ è massimo quando $a=0$ o $b=0$, valendo in ambo i casi $V_{\max} = \frac{16}{15}\pi\frac{9}{16} = \frac{3}{5}\pi$, mentre è minimo quando $a=b=\frac{3}{8}$ e vale $V_{\min} = \frac{16}{15}\pi\frac{9}{32} = \frac{3}{10}\pi$.

## Svolgimento Quesiti

① Si sezioni un cubo con tre piani paralleli alle facce del cubo medesimo.

1. Quale deve essere la posizione reciproca dei piani affinché essi suddividano il cubo in otto cubi più piccoli?

2. Dimostrare che la somma dei volumi delle sfere inscritte nei cubi più piccoli è uguale al volume della sfera inscritta nel cubo di partenza.

Dovendo i cubi avere facce parallele, sarà necessario secare il cubo di partenza con piani paralleli alle sue facce: le uniche giaciture possibili saranno dunque tre, con piani paralleli a ciascuna delle tre coppie di facce parallele. Tre piani, ciascuno dei quali perpendicolare a una coppia di facce, divideranno il cubo in otto parallelepipedi. Nel caso in cui ciascuno dei piani sia equidistante dalla coppia di facce ad esso parallele, si verranno a formare otto cubi di lato pari alla metà del lato del cubo di partenza.
Si considerino, in quest'ultimo caso, la sfera inscritta nel cubo iniziale e le 8 sfere inscritte nei cubi più piccoli. Sia $4l$ il lato del cubo grande: il raggio della sfera in esso inscritta sarà dunque pari a $2l$, e il suo volume varrà $\frac{4}{3}\pi(2l)^3 = \frac{4}{3}\pi 8l^3$; in ciascuno degli 8 cubi aventi lato $2l$ sarà inscritta una sfera di raggio $l$, pertanto si avranno 8 sfere di volume $\frac{4}{3}\pi l^3$, per un volume totale di $8 \cdot \frac{4}{3}\pi l^3$, che è evidentemente equivalente al volume della sfera più grande. Si osservi che è possibile suddividere il cubo in 27, 64, 125 ... cubi più piccoli utilizzando un numero via via maggiore di piani paralleli alle facce del cubo ed equidistanti fra loro, e che in ciascun caso la somma dei volumi di tutte le sfere inscritte è sempre uguale al volume della sfera inscritta nel cubo di partenza.

② Sono date due rette $r$ e $s$ di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = k+1 \\ y = 2k+a \\ z = k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t+2 \\ z = bt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Si determinino i valori dei parametri $a$ e $b$ tali per cui $r$ e $s$ sono incidenti e perpendicolari. Dopo avere individuato le coordinate del punto comune a $r$ ed $s$, si determini l'equazione del piano individuato da tali rette.

Affinché le rette $r$ e $s$ siano perpendicolari è necessario che i vettori che determinano la loro direzione siano perpendicolari. La retta $r$ è parallela al vettore $(1,\, 2,\, 1)$, mentre la $s$ a $(2,\, -1,\, b)$. La condizione di perpendicolarità si ha quando i vettori hanno prodotto scalare nullo, e cioè se $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot b = 0$, da cui $b = 0$. Di conseguenza la retta $s$, indipendentemente dal parametro $t$, ha $z = 0$, pertanto appartiene al piano $xy$. Il punto $P$ di intersezione fra le due rette avrà necessariamente $z = 0$, il che impone, relativamente alla retta $r$, che sia nullo il parametro $k$: pertanto tale punto avrà coordinate $(1,\, a,\, 0)$. Se la retta $s$ deve passare per $P$ avente ascissa $x = 1$, ne segue che anche il parametro $t$ deve essere nullo. Le coordinate di $P$ sono dunque $(1,\, 2,\, 0)$, da cui $a = 2$. In conclusione le rette sono incidenti e perpendicolari se e solo se $b = 0$ e $a = 2$.
Per costruire l'equazione del piano contenente le rette $r$ e $s$, si consideri che esso dovrà passare per $P = (1,\, 2,\, 0)$, nonché essere perpendicolare a un vettore a sua volta perpendicolare sia a $r$ sia a $s$. Il vettore cercato ha coordinate $(v_x,\, v_y,\, v_z)$ che rispettano le seguenti condizioni:

$$1 \cdot v_x + 2 \cdot v_y + 1 \cdot v_z = 0 \qquad 2 \cdot v_x + (-1) \cdot v_y + 0 \cdot v_z = 0\,.$$

Posto, senza alcuna perdita di generalità, $v_x = 1$, si calcola agevolmente che dev'essere $v_y = 2$ e $v_z = -5$. L'equazione del piano si troverà ponendo $a = 1$, $b = 2$ e $c = -5$ nell'equazione generica di un piano $ax + by + cz + d = 0$; e infine, imponendo nell'equazione $x + 2y - 5z + d = 0$ il passaggio per $P = (1,\, 2,\, 0)$.

Si ricava, dopo facili calcoli, che l'equazione del piano è $x + 2y - 5z - 5 = 0$.

③ 400 anni fa moriva il matematico, astronomo e fisico scozzese John Napier (1550-1617), inventore dei logaritmi naturali o neperiani. Il candidato esponga e illustri la formula che permette di passare dal logaritmo decimale al logaritmo neperiano, e calcoli, con l'aiuto di una calcolatrice, la costante di proporzionalità che lega i due tipi di logaritmo.

La richiesta è di utilizzare la nota *formula del cambiamento di base* per i logaritmi: $\log_a x = \log_a b \log_b x$, oppure, in forma equivalente, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Nel caso presente, utilizzando la notazione ln per il logaritmo di base $e$ o neperiano, $\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$. La costante di conversione è pertanto $\log_{10} e$, il cui valore, da calcolarsi tramite una calcolatrice, è di circa 0,434294.

④ Si considerino tutti i triangoli isosceli per i quali è costante la somma della base con l'altezza. Si individui fra essi quello avente perimetro massimo.

Siano $2x$ la base e $h$ l'altezza del triangolo isoscele. Si calcoli il lato obliquo del triangolo con il *Teorema di Pitagora*: $\sqrt{x^2 + h^2}$. Il perimetro del triangolo è dunque $2p = 2x + 2\sqrt{x^2 + h^2}$; ponendo ora la somma $2x + h = A$, con $A$ costante, si cerca il massimo dell'espressione $2p = 2x + 2\sqrt{x^2 + (A - 2x)^2}$. I limiti di variabilità di $x$ sono i seguenti: $0 \leq x \leq A/2$, dove i casi limite $x = 0$ e $x = A/2$ corrispondono a triangoli che degenerano in un segmento. Dall'espressione da massimizzare può essere eliminata la costante moltiplicativa; si proceda dunque con il calcolo della derivata della funzione $y = x + \sqrt{x^2 + (A - 2x)^2} = x + \sqrt{5x^2 - 4Ax + A^2}$. La derivata è $y' = 1 + \frac{10x-4A}{2\sqrt{5x^2-4Ax+A^2}} = 1 + \frac{5x-2A}{\sqrt{5x^2-4Ax+A^2}}$. Si può facilmente costatare che $y' > 0$ equivale a

$$\sqrt{5x^2 - 4Ax + A^2} + 5x - 2A > 0 \longleftrightarrow \sqrt{5x^2 - 4Ax + A^2} > 2A - 5x.$$

Se $2A - 5x < 0$, ovvero $x > 0.4A$, la disequazione è senz'altro soddisfatta. Se $2A - 5x \geq 0$ si può elevare i due membri della disequazione al quadrato ottenendo

$$5x^2 - 4Ax + A^2 > 4A^2 - 20Ax + 25x^2 \longleftrightarrow 20x^2 - 16Ax + 3A^2 > 0\,.$$

L'equazione associata $20x^2 - 16Ax + 3A^2 = 0$ ha soluzioni $x_1 = \frac{A}{2}$ e $x_2 = \frac{3}{10}A$, pertanto la precedente disequazione ha come soluzione $0.3A < x < 0.5A$. Si può quindi concludere che la derivata prima $y'$ è positiva per $x > 0.3A$, negativa per $0 < x < 0.3A$ e nulla per $x = 0.3A$. Il minimo assoluto è quindi assunto per $x = 0.3A$. I massimi saranno invece assunti sugli estremi. In particolare quando $x = 0$ si ha $h = A$ e pertanto $2p = 2A$; quando $x = \frac{A}{2}$, $h = 0$, quindi nuovamente $2p = 2A$. Il perimetro è dunque massimo agli estremi dell'intervallo di variabilità per la $x$, in corrispondenza a triangoli degeneri.

⑤ Si calcoli il valore del parametro $a$ per cui $\int_1^a \ln x dx = 1$.

Si osservi innanzitutto che, considerato il campo di esistenza della funzione integranda, deve essere $a > 0$. Integrando per parti, utilizzando come fattore differenziale $du = 1dx$, si ottiene

$$\int_1^a \ln x\, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^a - \int_1^a x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \Big[x \ln x - x\Big]_1^a = a \ln a - a + 1$$

Pertanto il parametro $a$ (si osservi che $a \neq 0$) deve soddisfare

$$a \ln a - a + 1 = 1 \longleftrightarrow a(\ln a - 1) = 0 \longleftrightarrow \ln a = 1 \longleftrightarrow a = e.$$

⑥ Calcolare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1+t)\,dt}{x^4}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Le funzioni a numeratore e denominatore soddisfano le ipotesi del *Teorema di de L'Hospital*. In particolare, la derivata del numeratore si calcola applicando l'estensione del teorema fondamentale del calcolo integrale al caso di estremi di integrazione funzione della variabile indipendente $x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \ln(1+t)\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)\cdot 2x - \ln(1)\cdot 0}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2}\,.$$

L'ultimo limite trovato può essere facilmente ricondotto a un limite notevole noto, operando la sostituzione $t = x^2$; noto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1\,,$$

ne segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}\,.$$

⑦ Dimostrare che il valor medio di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme e continua in un intervallo $[a,\, b]$ corrisponde alla media aritmetica di $a$ e $b$.

La densità di probabilità, nell'intervallo $[a,\, b]$, deve assumere il valore $1/(b-a)$. Il valor medio della variabile aleatoria è quindi

$$\int_a^b x\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

⑧ Si determini il valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ tale per cui l'equazione differenziale $y'' + cy = 4$ ammette soluzioni periodiche di periodo $\pi$. Per tale valore di $c$ si trovi la soluzione soddisfacente le condizioni iniziali $y(0) = 2 \wedge y'(0) = 2$, e di essa si determinino il massimo e il minimo valore.

La pulsazione della funzione periodica è $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, pertanto l'equazione caratteristica associata $\lambda^2 + c = 0$ deve avere come soluzioni $\pm\omega i = \pm 2i$. Ne discende che $c = 4$. L'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea associata è

$$y_{\mathrm{om}} = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

mentre una soluzione particolare dell'equazione completa è la costante

$$y_{\mathrm{p}} = 2.$$

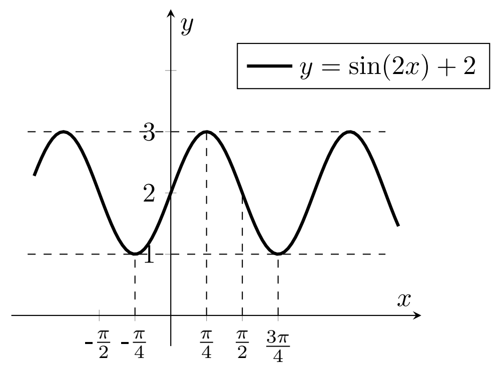
Pertanto l'integrale generale della completa è

$$y = y_{\mathrm{om}} + y_{\mathrm{p}} = A\cos 2x + B\sin 2x + 2.$$

Imponendo $y(0) = 2$ si ottiene $A + 2 = 2 \longleftrightarrow A = 0$, mentre da $y'(0) = 2$ si ottiene $2B = 2 \longleftrightarrow B = 1$. La soluzione ricercata è quindi

$$y = \sin 2x + 2.$$

Tale funzione armonica di periodo $\pi$ ammette come massimo valore $f(\pi/4) = 3$ e minimo valore $f(-\pi/4) = 1$; il grafico risulta quindi


$y = \sin(2x) + 2$
$y$
$x$
3
2
1
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$